17 Inéquations produit ou quotient nul.

Exercice 1.
Essayez de résoudre, dans l'ensemble des réels, les inéquations d'inconnue x.

$$(E_1) \quad -3x+1<0$$
$$(E_2) \quad 2(x-3)(-7x+14)>0$$

I Étude du signe d'une fonction factorisée.

Exercice 2.
Étudiez le signe de la fonction f définie sur $[-10;10]$ par, pour tout $x \in [-10;10]$

$$f(x)=(3x-7)x^2(-x+1)$$

Correction de l'exercice 2

La fonction f est un produit de trois fonctions : $g(x)=3x-7$, $h(x)=x^2$ et $k(x)=-x+1$ quelque soit x dans $[-10;10]$. Pour étudier le signe de f nous allons donc rechercher le signe de ces trois fonctions.

1. Étudions le signe de $g(x)=3x-7$ sur $[-10;10]$.

   g est une fonction affine de la forme $g(x)=ax+b$ avec $a=3$ et $b=-7$. Puisque son coefficient directeur a est strictement positif nous pouvons affirmer que

   . g s'annule en $-\frac{b}{a}=-\frac{-7}{3}=\frac{7}{3}$.
   . g est strictement négative sur $\left[-10;\frac{7}{3}\right[$.
   . g est strictement positive sur $\left]\frac{7}{3};10\right]$.

2. Étudions le signe de $h(x)=x^2$ sur $[-10;10]$.

   h est la restriction de la fonction carrée à l'intervalle $[-10;10]$, donc, d'après le cours

   . $h(x)>0$ si et seulement si $x \in [-10,0[\cup]0,10]$.
   . $h(x)=0$ si et seulement si $x=0$.

3. Étudions le signe de $k(x)=-x+1$ sur $[-10;10]$.

   k est une fonction affine de la forme $k(x)=ax+b$ avec $a=-1$ et $b=1$. Puisque son coefficient directeur a est strictement négatif nous pouvons affirmer que

- k s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{-1} = 1$.
- g est strictement positive sur $[-10;1[$.
- g est strictement négative sur $]1;10]$.

Nous regroupons à présent le signe des trois facteurs dans un unique tableau de signe. Pour cela il faut suivre les étapes suivantes.

1. Les lignes : x, les facteurs $g(x) = 3x - 7$, $h(x) = x^2$, $k(x) = -x + 1$, et leur produit $f(x)$.
2. Indiquer l'ensemble de définition de x : $[-10, 10]$.
3. Les valeurs de x qui annulent les facteurs g, h ou k (placés dans l'ordre croissant). Ces valeurs indiquent les colonnes du tableau. Puis les zéros en dessous indiquant le facteur qu'elles annulent.
4. Puis on complète les lignes de signes du tableau grâce aux résolutions d'équations et inéquations faites précédemment.
   Par exemple : $g(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]\frac{7}{3}, 10\right]$, on place donc des signes + après le zéro de la ligne.
5. Il est alors possible de compléter la dernière ligne de signe en utilisant la règle sur le signe d'un produit. Par exemple, pour $x \in [-10, 0[$, $3x - 7$ est négatif, x^2 est positif et $-x + 1$ est positif donc leur produit est négatif.

x	-10		0		1		$\frac{7}{3}$		10
$3x - 7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x + 1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

La rédaction adoptée ci-dessus est très détaillée nous adopterons une rédaction un peu plus légère dans la pratique.

Exercice 3.

Étudiez le signe de $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [-6;4] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+4)(-x+2) \end{array} \right.$

Correction de l'exercice 3

Étudions le signe de g.

* $h : x \mapsto x + 4$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = 4$. h est strictement croissante car $a > 0$. h s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4$.
* $k : x \mapsto -x+2$ est une fonction affine avec $a = -1$ et $b = 2$. k est strictement décroissante car $a < 0$. k s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{-1} = 2$.

Nous en déduisons :

x	-6		-4		2		4
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
g		$-$	0	$+$	0	$-$	

II Inéquation produit-nul.

Exercice 4.

Résolvez l'inéquation $-2(x+1)(-7-x) \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4

Notons $f : x \mapsto -2(x+1)(-7-x)$ quelque soit x réel.

Nous devons trouver pour quelles valeurs de x $f(x)$ est positif ou nul.

Étudions le signe de f.

* -2 est strictement négatif.
* $x \mapsto x+1$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = 1$, elle s'annule en -1 et, son coefficient directeur étant strictement positif elle est strictement croissante.
* $x \mapsto -7-x$ est une fonction affine avec $a = -1$ et $b = -7$, elle s'annule en $-\frac{-7}{-1} = -7$ et, son coefficient directeur étant strictement négatif, elle est strictement décroissante.

Nous en déduisons :

x	$-\infty$		-7		-1		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-7-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $-2(x+1)(-7-x) \geqslant 0$ est $\mathcal{S} =]-\infty;-7] \cup [-1;+\infty[$.

Exercice 5.

1. $(x-5)(-2x+6) \geqslant 0$
2. $(3x-5)(x+4) > 0$
3. $(x+3)(-x+6) \leqslant 0$
4. $(-x+4)(3x+2) > 0$
5. $(10x+5)(-3x+4) > 0$
6. $(x-4)(3-x) \leqslant 0$
7. $(-2x+3)(5+x) > 0$
8. $3x(3x-5) < 0$
9. $-(x+1)^2(2x-1) \geqslant 0$
10. $-2x(x-1)(4-x) \leqslant 0$
11. $x^2(4-x)(-2x+1) > 0$
12. $x^3(x+1) < 0$
13. $(x^2+1)(x-1) \geqslant 0$
14. $(x-2)(4-x) < 0$
15. $\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(x-\frac{7}{6}\right) \geqslant 0$
16. $(x+\sqrt{3})(x-4) \geqslant 0$
17. $(3x-7)(7-3x) \leqslant 0$

Correction de l'exercice 5

Dans tous les cas nous noterons $P(x)$ l'expression factorisée (*i.e.* sous forme de produit).

Le corrigé ici ne détail pas l'étude du signe de chaque facteur.

1.

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x+6$		$+$	0	$-$		$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x-5)(-2x+6) \geqslant 0$ est $\mathcal{S} = [3;5]$.

2.

x	$-\infty$		-4		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3x-5)(x+4)>0$ est
$\mathcal{S} = \left]-\infty;4\right[\cup \left]\frac{5}{3};+\infty\right[$.

3.

x	$-\infty$		-3		6		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x+3)(-x+6)\leqslant 0$ est
$\mathcal{S} = \left]-\infty;-3\right] \cup \left[6;+\infty\right[$.

4.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(-x+4)(3x+2)>0$ est
$\mathcal{S} = \left]-\frac{2}{3};4\right[$.

5.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$10x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(10x+5)(-3x+4) > 0$ est
$\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right[$.

6.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$3-x$		$+$	0	$+-$		$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x-4)(3-x) \leqslant 0$ est
$\mathcal{S} =]-\infty; 3] \cup [4; +\infty[$.

7.

x	$-\infty$		-5		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$5+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(-2x+3)(5+x) > 0$ est
$\mathcal{S} = \left]-5; \frac{3}{2}\right[$.

8.

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x(3x-5)<0$ est $\mathcal{S}=\left]0;\frac{5}{3}\right[$.

9.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $-(x+1)^2(2x-1)\geqslant 0$ est $\mathcal{S}=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$.

10.

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $-2x(x-1)(4-x)\leqslant 0$ est $\mathcal{S}=]-\infty;0]\cup[1;4]$.

11.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
x^2		+	0	+		+		+	
$4-x$		+		+		+	0	−	
$-2x+1$		+		+	0	−		−	
$P(x)$		+	0	+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2(4-x)(-2x+1) > 0$ est $\mathcal{S} = \left]-\infty;0\right[\cup \left]0;\frac{1}{2}\right[\cup \left]4;+\infty\right[$.

12.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^3		−		−	0	+	
$x+1$		−	0	+		+	
$P(x)$		+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^3(x+1) < 0$ est $\mathcal{S} =]-1;0[$.

13.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x^2+1		+		+	
$x-1$		−	0	+	
$P(x)$		−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x^2+1)(x-1) \geqslant 0$ est $\mathcal{S} = [1;+\infty[$.

14.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x-2)(4-x)<0$ est $\mathcal{S}=]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$.

15.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$\frac{7}{6}$		$+\infty$
$\frac{3}{4}-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-\frac{7}{6}$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(x-\frac{7}{6}\right) \geqslant 0$ est $\mathcal{S}=\left[\frac{3}{4};\frac{7}{6}\right]$.

16.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		4		$+\infty$
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x+\sqrt{3})(x-4) \geqslant 0$ est $\mathcal{S}=[\sqrt{3};4]$.

17.

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$3x-7$		$-$	0	$+$	
$7-3x$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3x-7)(7-3x) \leqslant 0$ est $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

III Inéquation se ramenant à une inéquation produit-nul.

Exercice 6.

Justifiez que les inéquations suivantes sont équivalentes

$$(2x-4)(x+5)+x > -5 \text{ et } (2x-3)(x+5) > 0$$

puis résolvez l'inéquation $(2x-4)(x+5)+x > -5$.

Correction de l'exercice 6

*

$$\begin{aligned}(2x-4)(x+5)+x > -5 &\iff (2x-4)(x+5)+x+5 > 0\\ &\iff (2x-4)(x+5)+1\times(x+5) > 0\\ &\iff [(2x-4)+1](x+5) > 0\\ &\iff (2x-4+1)(x+5) > 0\\ &\iff (2x-3)(x+5) > 0\end{aligned}$$

* Résolvons l'inéquation $(2x-3)(x+5) > 0$.

. $f : x \mapsto 2x-3$ est une fonction affine avec $a = 2$ et $b = -3$. $a > 0$ donc f est strictement croissante. f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$.

. $g : x \mapsto x+5$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = 5$. $a > 0$ donc g est strictement croissante. g s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$.

Nous en déduisons

x	$-\infty$		-5		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-3)(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de $(2x-4)(x+5)+x>-5$ est $\mathscr{S}=]-\infty;-5[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

Exercice 7.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 \leqslant 16$.

Correction de l'exercice 7

$$\begin{aligned} x^2 \leqslant 16 &\Longleftrightarrow x^2-16 \leqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-4)(x+4) \leqslant 0 \end{aligned}$$

Étudions le signe de $h : x \mapsto (x-4)(x+4)$.

- $f : x \mapsto x-4$ est une fonction affine avec $a=1$ et $b=-4$. $a>0$ donc f est strictement croissante. f s'annule en $-\frac{b}{a}=-\frac{-4}{1}=4$.
- $g : x \mapsto x+4$ est une fonction affine avec $a=1$ et $b=4$. $a>0$ donc g est strictement croissante. g s'annule en $-\frac{b}{a}=-\frac{4}{1}=-4$.

Nous en déduisons

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de $x^2 \leqslant 16$ est $\mathscr{S}=[-4;4]$.

Exercice 8.

Résolvez les inéquations suivantes dans l'ensemble des réels.

a) $x^2 - 4x \leqslant -2x - 1$

b) $3x(x+3) - (x+3)^2 \leqslant 0$

c) $x^3 + 2x^2 + x \geqslant 0$

d) $x(x+6) > 3(x+6)$

e) $2x(x-3) + 3x - 9 < 6x - 18$

f) $x^2(1-3x) + 4(6x-2) \geqslant 0$

g) $(1-2x)x - 4x(x+6) \leqslant 0$

h) $7 - x^2 < 2x - 2\sqrt{7}$

i) $(x^2 - 1) + 2x - 2 > 6x - 6$

j) $x^2 \leqslant 10$

k) $x^2 \leqslant -16$

l) $x^2 \leqslant 0$

m) $x^2 < 8$

n) $x^2 \leqslant 144$

o) $x^2 \leqslant 20$

p) $x^2 - 4 + (x+2)(2x+5) < 0$

q) $(x+1)(x-3) \geqslant x^2 - 9$

r) $4x - 4 + (x-1)(x-4) + x^2 - 1 > 0$

s) $(x+5)^2 \leqslant (x+5)(x+3)$

t) $(2x-1)(x+3) \geqslant \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+6)$

Correction de l'exercice 8

a) $(x-1)^2 \leq 0$. $\mathscr{S} = \{1\}$.

b) $(x+3)(2x-3) \leq 0$. $\mathscr{S} = \left[-3; \frac{3}{2}\right]$.

c) $x(x+1)^2 \geq 0$. $\mathscr{S} = \{-1\} \cup [0; +\infty[$.

d) $(x-3)(x+6) > 0$. $\mathscr{S} =]-\infty; -6[\cup]3; +\infty[$.

e) $(x-3)(2x-3) < 0$. $\mathscr{S} = \left]\frac{3}{2}; 3\right[$.

f)

$$x^2(1-3x)+4(6x-2) \geqslant 0$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} x^2(1-3x)+4\times(-2)(1-3x) &\geqslant 0 \\ x^2(1-3x)-8(1-3x) &\geqslant 0 \\ [x^2-8](1-3x) &\geqslant 0 \\ [x^2-(2\sqrt{2})^2](1-3x) &\geqslant 0 \\ (x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})(1-3x) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		$\frac{1}{3}$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$x-2\sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-3x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathscr{S} = \left]-\infty; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; 2\sqrt{2}\right]$.

g) $x(-6x-23) \leqslant 0$. $\mathscr{S} = \left]-\infty, -\frac{23}{6}\right] \cup [0, +\infty[$.

h) $(\sqrt{7}-x)(x+\sqrt{7}+2) < 0$. $\mathscr{S} = \left]-\infty, -\sqrt{7}-2\right[\cup \left]\sqrt{7}, +\infty\right[$.

i) $(x-1)(x-3) > 0$. $\mathscr{S} =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$.

j) $(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10}) \leqslant 0$. $\mathscr{S} =]-\infty, \sqrt{10}[\cup]\sqrt{10}, +\infty[$.

k) $\varnothing$

l) $\{0\}$.

m) $(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}) < 0$. $\mathscr{S} =]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[$.

n) $(x-12)(x+12) \leqslant 0$. $\mathscr{S} =]-\infty, -12] \cup [12, +\infty[$.

o) $(x-2\sqrt{5})(x+2\sqrt{5}) \leqslant 0$. $\mathscr{S} = [-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$.

p) $3(x+2)(x+1) < 0$. $\mathscr{S} =]-2, -1[$.

q) $-2(x-3) \geqslant 0$. $\mathscr{S} =]-\infty, 3]$.

r) $(x-1)(2x+1) > 0$. $\mathscr{S} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$.

s) $2(x+5) \leqslant 0$. $\mathscr{S} =]-\infty, -5]$.

t) $x\left(x-\frac{1}{2}\right) \geqslant 0$. $\mathscr{S} =]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$.

IV Inéquation quotient.

Exercice 9.

Résolvez l'inéquation $\dfrac{-x+1}{-2x+8} > 0$.

Correction de l'exercice 9

Étudions le signe de $h : x \mapsto \frac{-x+1}{-2x+8}$.

. $f : x \mapsto -x+1$ est une fonction affine avec $a = -1$ et $b = 1$. $a < 0$ donc f est strictement décroissante. f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{-1} = 1$.

. $g : x \mapsto -2x+8$ est une fonction affine avec $a = -2$ et $b = 8$. $a < 0$ donc g est strictement décroissante. g s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{-2} = 4$.

Nous en déduisons

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$-2x+8$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Il ne faut oublier d'exclure 4 de l'ensemble de définition (double barre) car il est impossible de diviser par zéro.

L'ensemble des solutions de $\frac{-x+1}{-2x+8} > 0$ est $\mathscr{S} =]-\infty; 1] \cup]4; +\infty[$.

Exercice 10.

Résolvez les inéquations dans $\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{2x-4}{x+2} \leqslant 0$ b) $\dfrac{-2x+8}{3x-2} \leqslant 0$ c) $\dfrac{x+3}{2x-1} \geq 0$

d) $\dfrac{2-x}{5-2x} \leq 0$ e) $\dfrac{3x-1}{-x+5} > 0$ f) $\dfrac{5x(x-2)}{4x+1} < 0$

g) $\dfrac{2x^2}{(-x+1)(x+3)} \geq 0$ h) $\dfrac{-x(x-4)}{2+x^2} \leq 0$ i) $\dfrac{(x+1)(x-2)}{3-x} > 0$

j) $\dfrac{9-4x}{11-5x} < 0$ k) $\dfrac{-5+4x}{2x-1} \geq 0$ l) $\dfrac{x+1}{3-x} \leq 0$

m) $\dfrac{7-2x}{2x-1} > 0$ n) $\dfrac{-5x}{(2x-7)^2} < 0$ o) $\dfrac{1+2x^2}{7-x} \geq 0$

p) $\dfrac{x+4}{5-x} < 2$ q) $\dfrac{2x+4}{x-1} - 2 \geq 0$ r) $\dfrac{2x+4}{x+1} < 3$

s) $\dfrac{2x+3}{x+1} \leq \dfrac{x-6}{x+1}$ t) $1 < \dfrac{2x+10}{-x+3}$

Correction de l'exercice 10

1. Étudions le signe de $h : x \mapsto \frac{2x-4}{x+2}$.

   . $f : x \mapsto 2x-4$ est une fonction affine avec $a = 2$ et $b = -4$. $a > 0$ donc f est strictement croissante. f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$.

   . $g : x \mapsto x+2$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = 2$. $a > 0$ donc g est strictement croissante. g s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$.

   Nous en déduisons

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

   L'ensemble des solutions de $\frac{2x-4}{x+2} \leqslant 0$ est $\mathscr{S} =]-2; 2]$.

2. Étudions le signe de $h : x \mapsto \frac{-2x+8}{3x-2}$.

- . $f : x \mapsto -2x + 8$ est une fonction affine avec $a = -2$ et $b = 8$. $a < 0$ donc f est strictement décroissante. f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{-2} = 4$.
- . $g : x \mapsto 3x - 2$ est une fonction affine avec $a = 3$ et $b = -2$. $a > 0$ donc g est strictement croissante. g s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$.

Nous en déduisons

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
$-2x+8$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de $\frac{-2x+8}{3x-2} \leqslant 0$ est $\mathscr{S} = \left]-\infty; \frac{2}{3}\right[\cup [4; +\infty[$.

3.