16 Signe d'une fonction.

I Signe des fonctions de référence.

II Signe d'une fonction affine.

Exercice 1.

Donnez le tableau de signe de f définie sur l'intervalle I dans les différents cas proposés.

1. $f(x) = 2x + 4$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 5x - 15$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = -7x + 14$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = -13x - 39$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = x - \pi$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = -x - 2$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = 3x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = 5x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = -4x + 13$, $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = -3x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = 5x + 12$, $I =]-\infty; -3[$.
14. $f(x) = 6x - 8$, $I = [-12; 10]$.
15. $f(x) = -8x + 12$, $I = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
16. $f(x) = -3x - 24$, $I =]-8; 10[$.

Correction de l'exercice 1

1.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

4.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

5.

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

6.

x	$-\infty$		π		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

7.

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

8.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

9.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

10.

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

11.

x	$-\infty$		$\frac{13}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

12.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

13.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{12}{5}$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

14.

x	-12		$\frac{4}{3}$		10
$f(x)$		$-$	0	$+$	

15.

x	$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$-$	

16.

x	-8		10	
$f(x)$	‖	$-$	‖	

Exercice 2.

Une patinoire propose deux tarifs :

— tarif A : chaque entrée coûte $5,25$ €.

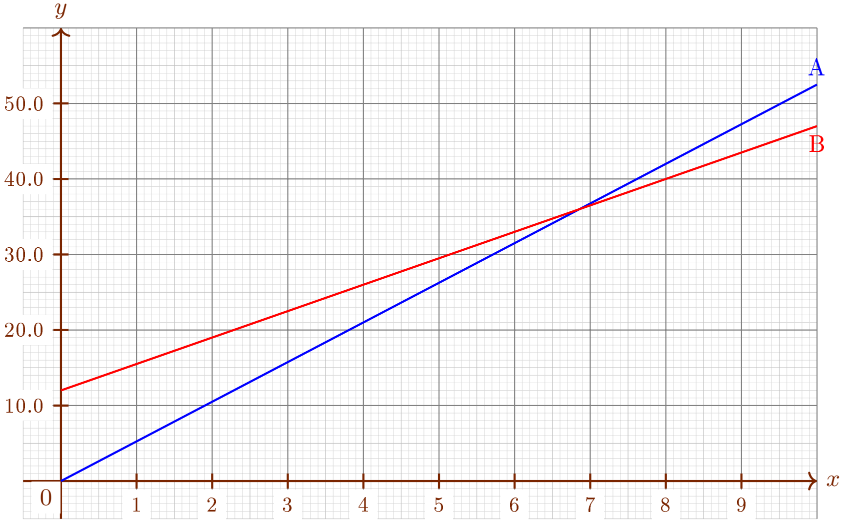
— tarif B : un abonnement annuel de 12 € et chaque entrée coûte alors $3,50$ €.

x désigne le nombre de fois qu'un patineur a fréquenté la patinoire.

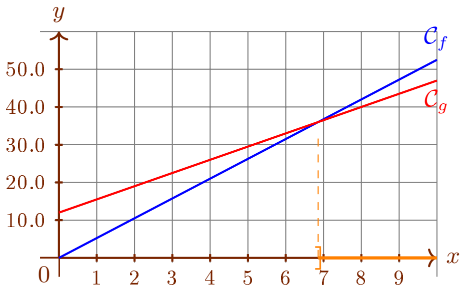
1. (a) Donnez l'expression de la fonction f qui modélise le budget annuel pour la patinoire avec le tarif A et celle de g pour le tarif B.
   (b) Tracez ces deux fonctions dans un repère approprié (attention au choix des unités).
2. (a) Résolvez graphiquement $f(x) > g(x)$.
   (b) Résolvez par le calcul $f(x) > g(x)$.
   (c) Que peut faire le patineur de ces solutions quand il veut déterminer lequel des deux tarifs est le plus avantageux ?

Correction de l'exercice 2

1. (a) $f(x) = 5,25x$ et $g(x) = 3,50x + 12$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.
   (b) pour le tracer de la courbe représentative d'une fonction affine revoyez l'exercice 1 de cet leçon.



2. (a)



Par lecture graphique

l'ensemble des solutions de $f(x) > g(x)$ est $]6; +\infty[$.

(b) Résolvons l'inéquation linéaire $f(x) > g(x)$.

Cette inéquation équivaut successivement à

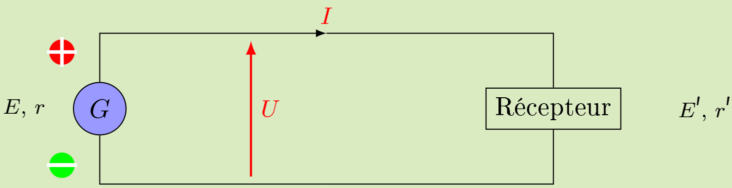
$$\begin{aligned}
5,25x &> 3,5x+12\\
5,25x-3,5x &> 3,5x+12-3,5x\\
(5,25-3,5)x &> 12\\
1,75x &> 12\\
\frac{1,75x}{1,75} &> \frac{12}{1,75}\\
x &> \frac{48}{7}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{48}{7};+\infty\right[.}$

(c) En arrondissant à 10^{-2} par excès $\frac{48}{7} \approx 6,86$.

Si le patineur va 7 fois ou plus dans l'année la patinoire il doit choisir le forfait B sinon il doit choisir le forfait A.

Exercice 3.



Dans le circuit ci-dessus, le générateur possède une force électromotrice E et une résistance interne r. La tension U_1 à ses bornes est une fonction affine de l'intensité I du courant électrique selon la formule $U_1 = E - rI$.
De même, le récepteur possède une force contre électromotrice E' et une résistance interne r'. La tension U_2 aux bornes du récepteur est également une fonction affine de l'intensité du circuit I selon la formule $U_2 = E' + r'I$.

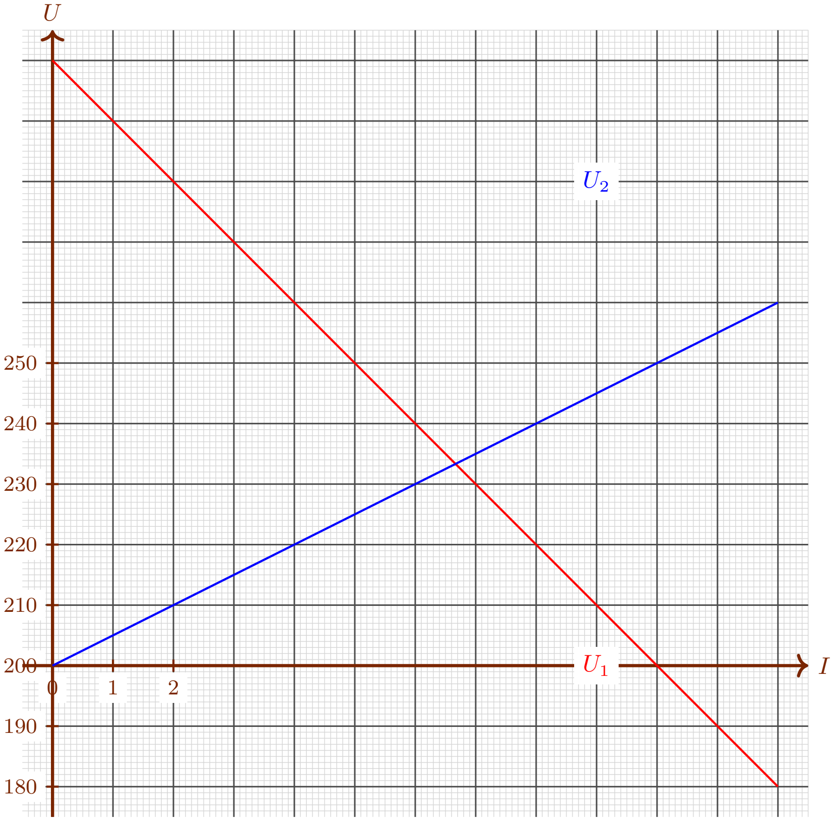
1. Nous supposerons que $E = 300$V, $E' = 200$ V, $r = 10\ \Omega$ et $r' = 5\ \Omega$.

   Tracez dans un même repère la courbe représentative de U_1 en fonction de I et de U_2 en fonction de I.
2. Lorsque le circuit est branché, la tension aux bornes du générateur est égale à la tension aux bornes du récepteur.

   Montrez alors que $I = \frac{E-E'}{r+r'}$.

Correction de l'exercice 3

1. les fonctions $U_1 : I \mapsto E - rI$ et $U_2 : I \mapsto E' + r'I$ sont des fonctions affines et leurs courbe représentatives sont donc des droites.
   Avec les valeurs numériques : $U_1 : I \mapsto 300 - 10 \times I$ et $U_2 : I \mapsto 200 + 5 \times I$.



2. Déterminons l'intensité pour laquelle les tensions aux bornes des générateur et récepteur.

   La tension est la même si et seulement si $U_1 = U_2$. Cette dernière égalité équivaut successivement à

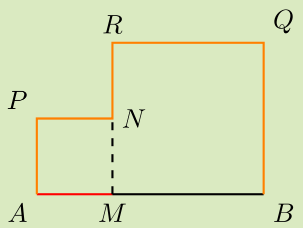
$$\begin{aligned} E - rI &= E' + r'I \\ E - rI - E' &= r'IE' - E' \\ E - E' - rI &= r'I \\ E - E' - rI + rI &= r'I + rI \\ E - E' &= r'I + rI \end{aligned}$$

On identifie un facteur commun :

$$E - E' = (r' + r)I$$
$$\frac{E - E'}{r' + r} = I$$

Lorsque les tensions sont égales $I = \frac{E-E'}{r+r'}$.

Exercice 4.



$AB = 6$ cm. M est un point du segment $[AB]$ et nous noterons $AM = x$. Dans le même demi-plan de frontière (AB), sont construits les carrés $AMNP$ et $MBQR$.
f est la fonction qui à x associe la longueur $f(x)$ de la ligne polygonale $APNRQB$ (tracée en orange sur la figure ci-contre).
La figure a été faite dans le cas où x est compris entre 0 et 3.

Trouvez l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la longueur de la ligne polygonale est comprise entre 14 et 16 cm.

Correction de l'exercice 4

Nous remarquons qu'il y aura deux cas suivant que $x \in [0;3]$ ou $x \in [3;6]$. Nous allons donc raisonner par disjonction des cas.

* Premier cas : supposons $x \in [0;3]$.
  Alors $f(x) = -2x + 18$.
  Nous voulons que $14 \leqslant f(x) \leqslant 16$. Cet encadrement équivaut au système

$$\begin{cases} 14 \leqslant -2x + 18 \\ -2x + 18 \leqslant 16 \end{cases}$$

  Autrement dit :

$$\begin{cases} x \leqslant 2 \\ 1 \leqslant x \end{cases}.$$

  Ce qui équivaut encore à : $x \in [0;3] \cap [1 : +\infty[\cap] - \infty; 2]$. Finalement : $x \in [1;2]$.
* Second cas : supposons $x \in [3;6]$.
  Nous pourrions nous contenter d'évoquer la symétrie du problème et affirmer que $[4;5]$ est aussi un ensemble de solutions au problème.
  Nous pouvons également reprendre le précédent raisonnement avec, dans ce cas, $f(x) = 2x + 6$.

L'ensemble des solutions du problème est $[1;2] \cup [4;5]$.

Exercice 5.

Une revue n'est distribuée que sur abonnement annuel. Le nombre d'abonnés $A(x)$ est donné en fonction du prix x de l'abonnement en euros par :

$$A(x) = -50x + 12\,500, \text{ pour } x \geq 0.$$

1. Si l'abonnement est fixé à $x = 50$ €, quel est le nombre d'abonnés $A(x)$?
2. (a) Quel est le sens de variation de la fonction A ?
   (b) Comment évolue le nombre d'abonnés quand le prix de l'abonnement augmente ?
   (c) De combien varie le nombre d'abonnés quand le prix augmente de 1 € ?
3. (a) Calculez $A(250)$.
   (b) Pour quelles valeurs de x a-t-on $A(x) \geqslant 0$?
4. La recette.
   (a) Le prix de l'abonnement est de 50 €.
   Quelle est la recette correspondante ?
   (b) Le prix de l'abonnement est x $(0 \leqslant x \leqslant 250)$. Montrez que la recette est $R(x) = x(-50x + 12\,500)$.
   (c) À l'aide de la calculatrice, dressez le tableau de variation de R puis conjecturez le prix de l'abonnement qui semble assurer la recette maximale.

Correction de l'exercice 5

1. $A(50) = 10\,000$.
2. (a) Déterminons le sens de variation de A.

   A est une foncion affine avec $a = -50$ et $b = 12\,500$.
   Puisque $a < 0$

   A est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) Quand le prix de l'abonnement augmente le nombre d'abonnés diminue.
   (c) Lorsque le prix de l'abonnement augmente de 1 €, passant de x à $x + 1$ alors le nombre d'abonné varie de

$$\begin{aligned} A(x+1) - A(x) &= -50(x+1) + 12\,500 - [-50x + 12\,500] \\ &= -50 \end{aligned}$$

Lorsque l'abonnement augmente de 1 euro le nombre d'abonnés diminue de 50.

3. (a) $A(250) = 0$.

   (b) Résolvons : $A(x) \geq 0$.

   L'inéquation proposée équivaut successivement à

$$\begin{aligned} -50x + 12\,500 &\geqslant 0 \\ -50x + 12\,500 - 12\,500 &\geqslant 0 - 12\,500 \\ -50x &\geqslant 12\,500 \\ \frac{-50x}{-50} &\leqslant \frac{12\,500}{-50} \\ x &\leq 250 \end{aligned}$$

$A(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant 250$.

4. (a) Expression de la recette.

   Si le prix de l'abonnement est de 50 euros, alors le nombre d'abonnés est de $A(50) = 10\,000$.
   La recette est donc par proportionnalité

$$50 \times 10\,000 = 500\,000.$$

Si le prix de l'abonnement de 50 euros alors la recette est de 500 mille euros.

   (b) déterminons la recette pour un abonnement à x euros.

   Si le prix de l'abonnement est de x euros alors, le nombre d'abonné étant de $A(x)$,par proportionnalité,

$$R(x) = x \times A(x)$$

quelque soit $x \in [0; 250]$

$$R(x) = x(-50x + 12\,500).$$

(c) Avec la calculatrice nous obtenons une parabole qui présente un sommet dont les coordonnées sont $(125; 781\,250)$.
Donc

$$\boxed{\text{la recette maximale est de } 781\,250 \text{ euros.}}$$

Exercice 6.

Au quotidien pour exprimer une température, on utilise le degré Celsius (noté °C).
En physique et en chimie on préfère utiliser l'unité de température absolue : le kelvin (noté K).
On sait que :
0 °C correspond à $273,15$ K ;
0 K (appelé *zéro absolu*) correspond à $-273,15$ °C.
On sait aussi qu'une augmentation de 1 °C entraîne une augmentation de 1 K.

1. Soit x une température exprimée en degrés Celsius. Déterminez l'expression $f(x)$ de cette température exprimée en kelvins.
2. Soit x une température exprimée en kelvins. Déterminez l'expression $g(x)$ de cette température exprimée en degrés Celsius.
3. Soit x une température exprimée en kelvin. Calculez $f(g(x))$.

Correction de l'exercice 6

1. L'énoncé n'est pas très explicite mais le fait que qu'une augmentation de 1 °C entraîne une augmentation de 1 K peut s'interpréter en disant que la température en kelvin est une fonction affine de la température en degré Celsius et dont le coefficient directeur est donc (taux d'accroissement) égale à 1.
   Ainsi $f(x) = x + b$.
   Pour trouver b utilisons une valeur remarquable. 0 °C correspond à $273,15$ K donc on doit avoir : $f(0) = 273,15$. Autrement dit $b = 273,15$.
   $$\boxed{f(x) = x + 273,15}$$
2. De même
   $$\boxed{g(x) = x - 273,15}$$
3. $$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x - 273,15) \\ &= (x - 273,15) + 273,15 \\ &= x \end{aligned}$$

$$f(g(x)) = x.$$

Dans ce cas les fonctions f et g sont dites *réciproques* l'une de l'autre. C'est une propriété extrêmement intéressante pour une fonction.

Exercice 7.

Le degré Celsius (noté °C) et le degré Fahrenheit (noté °F) sont deux unités de température.
Dans l'échelle Celsius, la température de fusion de l'eau est de 0 °C et la température d'ébullition est de 100 °C (dans des conditions normales de pression atmosphérique).
Dans l'échelle Fahrenheit, la température de fusion de l'eau est de 30 °F et la température d'ébullition est de 212 °F (dans des conditions normales de pression atmosphérique).
On sait que la relation qui relie degrés Celsius et degrés Fahrenheit est affine.

1. Soit x une température exprimée en degrés Celsius. Déterminez l'expression de $f(x)$ de cette température exprimée en degré Fahrenheit.
2. Soit x une température exprimée en degrés Fahrenheit. Déterminez l'expression de $g(x)$ de cette température exprimée en degré Celsius.
3. Recopiez et complétez le tableau de conversion suivant.

°F	-40	0			23	32	41			68	77			
°C			-15	-10				10	15			30	35	37

Exercice 8.

Exercice 9.

Exercice 20 page 141 du manuel Sesamath : dresser le tableau de signe à partir de la représentation graphique déterminer l'expression algébrique avec l'ordonnée à l'origine puis en résolvant une équation d'inconnue b en choisissant un point quelconque de la droite.

Exercice 10.

Exercice 21 page 141 du manuel Sesamath. Modifiez l'énoncé en : déterminez l'expression algébrique de la fonction affine représentée dans le repère.