15 Union, intersection et intervalles.

I Ensembles.

Un *ensemble* est un objet mathématique qui regroupe des *éléments* dont aucun n'est en double. Par exemple $\mathbb{R}$ et $[0;1]$ sont des ensembles.

Lorsqu'un ensemble ne contient que peu d'éléments on le présente avec des accolades. Par exemple $\{-7;2;0\}$ est un ensemble qui contient 3 éléments.

Il existe un ensemble qui ne contient aucun objet et qui est appelé *l'ensemble vide*. On le note $\varnothing$.

Quand tous les éléments d'un ensemble A appartiennent, aussi, à un ensemble B alors on dit que A est inclus dans B et on note $A \subset B$.

Par exemple $\{-3;a\} \subset \{-3;2;b;10^2;a\}$ puisque chaque élément de $\{-3;a\}$ est aussi un élément de $\{-3;2;b;10^2;a\}$.

II Union.

L'*union* de deux ensembles A et B est un ensemble qui contient tous les éléments de A ainsi que tous les éléments de B. Le nouvel ensemble obtenu en réunissant A et B est noté $A \cup B$ (qui se lit « A union B »).

Par exemple l'union de $\{1;-3;a\}$ et $\{-3;2;b;10^2;a\}$

est $\{1;-3;a\} \cup \{-3;2;b;10^2;a\} = \{1;-3;a;2;b;10^2\}$ (dans un ensemble chaque élément n'apparaît qu'une fois).

III Intersection.

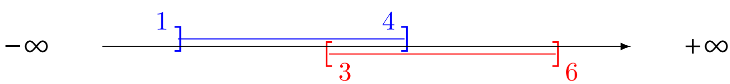
L'*intersection* de deux ensembles A et B est un ensemble qui contient tous les éléments commun à A et à B. Le nouvel ensemble obtenu par intersection de A et B est noté $A \cap B$ (qui se lit « A inter B »).

Par exemple l'intersection de $\{1;-3;a\}$ et $\{-3;2;b;10^2;a\}$ est $\{1;-3;a\} \cap \{-3;2;b;10^2;a$
$\{1;-3;a;2;b;10^2\}$.

IV Dans le cas des intervalles.

Pour déterminer union ou intersection d'intervalles nous nous appuierons sur une schéma avec la droite numérique.

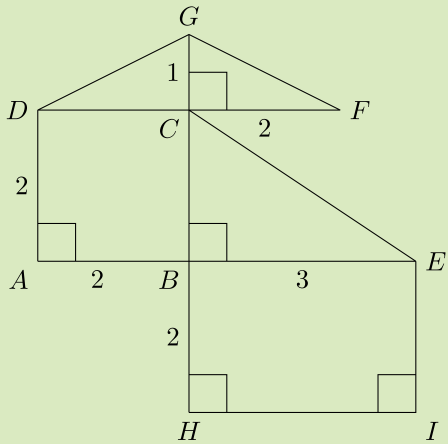
Par exemple pour les intervalles $]1;4]$ et $[3;6]$:



Du schéma nous déduisons : $]1;4] \cap [3;6] = [3;4]$ et $]1;4] \cup [3;6] =]1;6]$.

V Exercices.

Exercice 1.



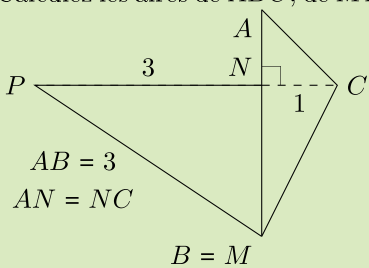
Calculez les aires délimitées par les polygones : $ABCD$, EBC, $EBHI$, DFG, $ABFC$, $DFIH$.

Correction de l'exercice 1

$\mathscr{A}(ABCD) = 4$, $\mathscr{A}(EBC) = 3$, $\mathscr{A}(EBHI) = 6$, $\mathscr{A}(DFG) = 2$, $\mathscr{A}(ABFC) = 4$, $\mathscr{A}(DFIH) = 14$.

Exercice 2.

Hachurez l'intersection et grisez l'union des triangles (surfaces) ABC et MNP. Calculez les aires de ABC, de MNP puis, si possible de leurs union et intersection.



Correction de l'exercice 2

$\mathscr{A}(ABC) = \frac{3}{2}$, $\mathscr{A}(MNP) = 3$.

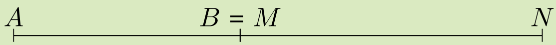
Exercice 3.

Dessinez en rouge l'union des segments $[AB]$ et $[MN]$.

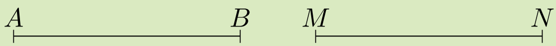
a)

b)

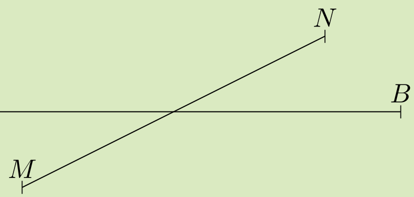
c)



d)



e)



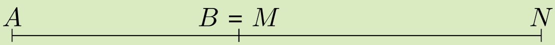
Exercice 4.

Dessinez en rouge l'intersection des segments $[AB]$ et $[MN]$.

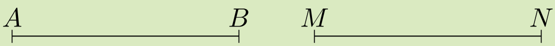
a)

b)

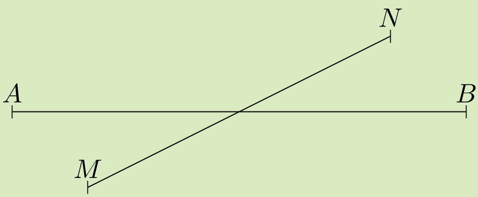
c)



d)



e)



Exercice 5.

Simplifiez si possible l'écriture des ensembles suivants.

a) $[-3;4[\cup]-1;5[$.

b) $[2;7]\cup[5;13]$.

c) $]-1;3]\cap]2;4]$.

d) $]-3;2]\cup[3;5]$.

e) $]-13;7]\cap[7;17]$.

f) $]-12;-11[\cap[-11;-3[$.

g) $]-\infty;5]\cap[3;7[$.

h) $]-\infty;0]\cup[0;+\infty[$.

Correction de l'exercice 5

a) $[-3;4[\cup]-1;5[=-3;5[$.

b) $[2;7]\cup[5;13]=[2;13]$.

c) $]-1;3]\cap]2;4]=]2;4]$.

d) $]-3;2]\cup[3;5]$ pas de simplification d'écriture.

e) $]-13;7]\cap[7;17]=\{7\}$.

f) $]-12;-11[\cap[-11;-3[=\varnothing$.

g) $]-\infty;5]\cap[3;7[[3;5]$.

h) $]-\infty;0]\cup[0;+\infty[=\mathbb{R}$.

Exercice 6.

A l'aide de la calculatrice résolvez les inéquations.

a) $4x^2+2x\geqslant 8$.

b) $\frac{1}{x}\geqslant x+1$.

Exercice 7.

Notons R l'ensemble des rectangles et L celui des losanges. Qu'est-ce que $R\cap L$?

Correction de l'exercice 7

$R\cap L$ est l'ensemble des carrés.

Exercice 8.

Déterminez les intersections et unions des ensembles E et F dans les cas suivants.

a) $E=\{1;4;-1\}$ et $F=\{-6;1;4\}$.

b) $E=\{1;2\}$ et $F=\{3;4\}$.

c) $E=[-2;3]$ et $F=[1;7]$.

d) $E=]-\infty;-3]$ et $F=]-6;2[$.

e) $E=]-\infty;5]$ et $]-6;+\infty[$.

f) $E=]2;6]$ et $F=[3;4]$.

g) $E=[2;+\infty[$ et $F=[0;2[$.

h) $E=]-\infty;1]$ et $F=[1;4[$.

i) $E=\{2;3\}$ et $F=[1;3[$.

j) $E=\{0\}$ et $F=]-1;1[$.

k) $E=[1;4[$ et $F=\mathbb{Z}$.

l) $E=]-\infty,5[$ et $F=\mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 8

a) $\{1;4;-1\}\cap\{-6;1;4\}=\{1;4\}$ et $\{1;4;-1\}\cup\{-6;1;4\}=\{1;4;-1;-6\}$.

b) $\{1;2\}\cap\{3;4\}=\varnothing$ et $\{1;2\}\cup\{3;4\}=\{1;2;3;4\}$.

c) $[-2;3]\cap[1;7]=[1;3]$ et $[-2;3]\cup[1;7]=[-2;7]$.

d) $]-\infty;-3]\cap]-6;2[=]-3;-6]$ et $]-\infty;-3]\cup]-6;2[=]-\infty;2[$.

e) $]-\infty;5]\cap]-6;+\infty[=]-6;5]$ et $]-\infty;5]\cup]-6;+\infty[=\mathbb{R}$.

f) $]2;6]\cap[3;4]=[3;4]$ et $]2;6]\cup[3;4]=]2;6]$.

g) $[2;+\infty[\cap[0;2[=\varnothing$ et $[2;+\infty[\cup[0;2[=[0;+\infty[$.

h) $]-\infty;1]\cap[1;4[=\{1\}$ et $]-\infty;1]\cup[1;4[=]-\infty;4[$.

i) $\{2;3\}\cap[1;3[=\{2\}$ et $\{2;3\}\cup[1;3[=[1;3]$.

j) $\{0\}\cap]-1;1[=\{0\}$ et $\{0\}\cap]-1;1[=]-1;1[$.

k) $[1;4[\cap\mathbb{Z}=\{1;2;3\}$ et pas de simplification d'écriture pour $[1;4[\cup\mathbb{Z}$.

l) $]-\infty,5[\cap\mathbb{N}=\{0;1;2;3;4\}$ et pas de simplification d'écriture pour $]-\infty,5[\cup\mathbb{N}$.