14 Équation ou inéquation, aspect graphique.

I Équation de la forme $f(x) = a$.

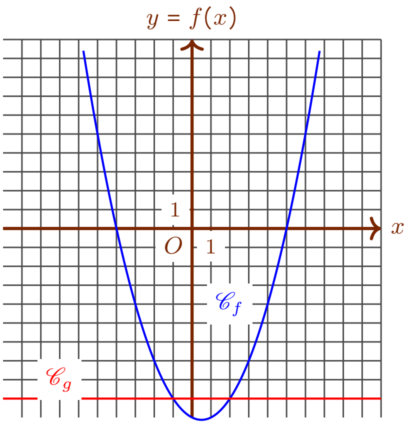
Exercice 1.

Déterminez graphiquement les solutions des équations suivantes :

1. $0,5x^2 - 0,5x - 10 = -9$.
2. $-\dfrac{1}{4}(x^2 + 7x + 6) = -3$.

Correction de l'exercice 1

1. Avec la calculatrice nous traçons les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto 0,5x^2 - 0,5x - 10$ et $g : x \mapsto -9$.



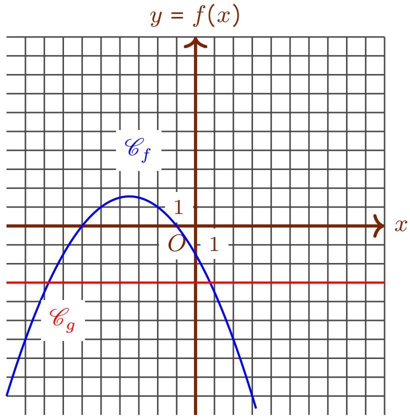
Par lecture nous pouvons conjecturer que

l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{-1; 2\}$.

Si pouvons vérifier que -1 et 2 sont effectivement des solutions en remplaçant dans l'équation rien ne garanti que nous ayons toutes les solutions : peut être le graphique ne nous montre-t-il pas tous les points d'ordonnée -9.

Nous en restons donc à une conjecture sans pouvoir affirmer que nous avons résolu l'équation.

2. Avec la calculatrice nous traçons les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto -\frac{1}{4}(x^2 + 7x + 6)$ et $g : x \mapsto -3$.



Exercice 2.

Résolvez graphiquement ou algébriquement (selon ce qui est le plus pertinent) les équations suivantes.

a) (E_1) : $-\frac{1}{3}x + 3 = 1.$

b) (E_2) : $x^2 = 4.$

c) (E_3) : $x^2 = 6.$

d) (E_4) : $3x^2 = 48.$

e) (E_5) : $(x+1)(x-2) = -2.$

f) (E_6) : $5x^3 + x = 13.$

Correction de l'exercice 2

1.

$$\begin{aligned}(E_1) &\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + 3 = 1\\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + 3 - 3 = 1 - 3\\ &\leftrightarrow -\frac{1}{3}x = -2\\ &\Leftrightarrow -3\times\left(-\frac{1}{3}\right)x = -3\times(-2)\\ &\Leftrightarrow x = 6\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \{6\}.}$$

2. Nous remarquons une équation qui n'est pas linéaire. Nous allons donc essayer de nous ramener à une équation produit-nul.

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff x-4 = 4-4\\ &\iff x^2 - 4 = 0\end{aligned}$$

Nous avons une équation égale à 0 il faut maintenant obtenir un produit, c'est-à-dire factoriser. Nous avonc deux méthodes de factorisation qui restent du collège : facteur commun (autrement dit distributivité) et identié remarquable (uniquement $a^2 - b^2$). Ici il n'y a pas de facteur commun. Par contre :

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff x^2 - 2^2 = 0\\ &\iff (x-2)(x+2) = 0\end{aligned}$$

Nous reconnaissons un produit nul donc :

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff x-2 = 0 \quad \text{ou} \quad x+2 = 0\\ &\iff x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \{2; -2\}.}$$

3. De même

$$(E_3) \iff (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) = 0$$

$$\boxed{\mathscr{S}_3 = \{\sqrt{6}; -\sqrt{6}\}.}$$

4. De même

$$(E_4) \iff 3(x-4)(x+4) = 0$$

$$\boxed{\mathscr{S}_4 = \{4; -4\}.}$$

5.

$$\begin{aligned}(E_5) &\iff (x+1)(x-2)+2 = -2+2\\ &\iff (x+1)(x-2)+2 = 0\end{aligned}$$

À ce stade nous bloquons : impossible de factoriser. E désespoire de cause esssayons de tout développer.

$$\begin{aligned}(E_5) &\Leftrightarrow x \times x + x \times (-2) + 1 \times x + 1 \times (-2) + 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + x - 2 + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x = 0\end{aligned}$$

Maintenant que tout est développé nous recommençons à essayer de factoriser : il y a maintenant un facteur commun.

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0\end{aligned}$$

$$\mathscr{S}_5 = \{0; 1\}.$$

Exercice 3.

Exercice 50 page 59 du manuel lelivrescolaire.fr.

Correction de l'exercice 3

1. (a) $f(x) = -0,5 \Leftrightarrow x \in \{-0,8\}$.
   (b) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$ admet une unique solution.
2. (a) $f(x) = -0,5 \Leftrightarrow x \in \{0\}$.
   (b) Si $k = 0$, alors $f(x) = k$ admet une unique solution sinon $f(x) = k$ admet deux solutions distinctes (et opposées).
3. (a) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{0\}$.
   (b) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$ admet une unique solution.
4. (a) $f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \{2, 3\}$.
   (b) Répondons à la question pour la courbe d).

k	$]-\infty; -1,2[$	$\{1,2\}$	$]-1,2; 0[$	$\{0\}$	$]0; +\infty[$
Nombre de solutions de $f(x) = k$.	1	2	3	2	1

Exercice 4.

Exercice 51 page 59 du manuel lelivrescolaire.fr.

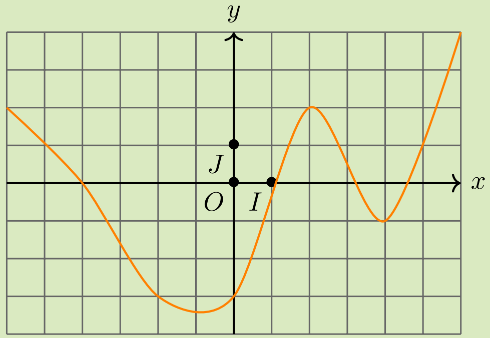
Correction de l'exercice 4

1. $H(1) = 1$. Au bout d'un mois l'arbre mesure 1 mètre.
2. $H(t) > 2$ si et seulement si $t > 2,5$. Ils seront commercialisable lorsque $t \in [2,5; +\infty[$.
3. En année arrondie au bout de 2 ans. En mois : au bout de 19 mois.
4. Tous les 2, 5 mois.

II "Résolution graphique" d'inéquation : $f(x) \leq a$ (avec $a \in \mathbb{R}$).

Exercice 5.

On a dessiné ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.



Résolvez les inéquations :

a) $f(x) \leqslant -3$.
b) $f(x) > 1$.
c) $f(x) < 0$.
d) $f(x) \leqslant -1$.
e) $f(x) \leqslant -4$.
f) $f(x) > 2$.

Exercice 6.

Exercice 31 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

III "Résolution graphique" d'inéquation : $f(x) \leq g(x)$.

Exercice 7.

Exercice 33 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

Exercice 8.

Exercice 35 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.