14 Équation ou inéquation, aspect graphique.

I Équation de la forme $f(x) = a$.

Exemples.

1. Résoudre l'équation $-2x + 3 = 1$.
2. Résoudre l'équation $x^2 = 4$.
3. Résoudre l'équation $x^3 = 1$.

Résoudre une équation (problème du domaine de l'algèbre) peut être interpréter comme la recherche d'antécédents par une fonction (problème du domaine de l'analyse).

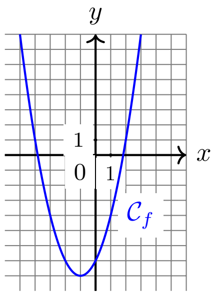
L'inconvénient de cette méthode : nous raisonnerons souvent avec la courbe représentative (lecture graphique) et ce n'est pas une démonstration, nous ne pouvons que conjecturer.

L'avantage : avec l'informatique il est très rapide et facile d'obtenir la courbe représentative d'une fonction et donc de faire une lecture graphique.

Pour conjecturer les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 7 = 3$ nous introduisons la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array} \right.$$

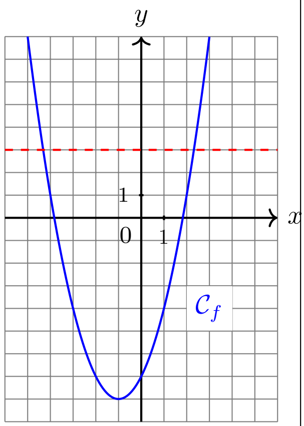
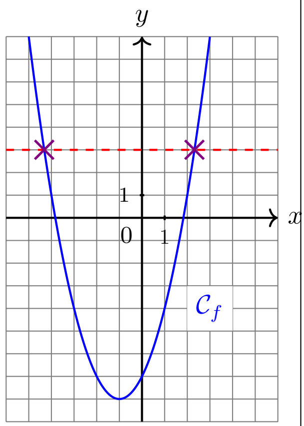
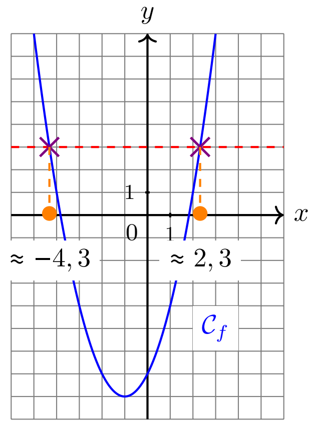
puis traçons sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ avec un logiciel :



Résoudre l'équation équivaut donc à rechercher les antécédents de 3 par la fonction f.

Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 3.

Concrètement pour les trouver il faut suivre les étapes suivantes.

1	2	3
Dessinez l'ordonnée 3.	Identifiez les points d'intersections.	Lire les abscisses correspondantes.
		

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $x^2+2x-7 = 3$ est $\{-4,3\ ;\ 2,3\}$.

Remarques.

1. Inconvénients de la méthode :
   — Comme pour toute lecture graphique les résultats sont approximatifs (insuffisant en mathématique)
   — il s'agit d'une partie de la courbe et nous ne savons pas ce qu'il en est pour le reste de la courbe.

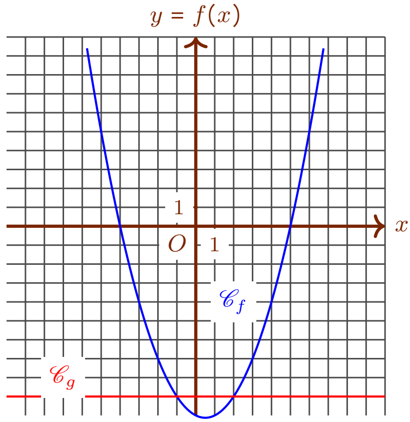
Exercice 1.

Déterminez graphiquement les solutions des équations suivantes :

1. $0,5x^2 - 0,5x - 10 = -9$.
2. $-\frac{1}{4}(x^2 + 7x + 6) = -3$.

Correction de l'exercice 1

1. Avec la calculatrice nous traçons les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto 0,5x^2 - 0,5x - 10$ et $g : x \mapsto -9$.



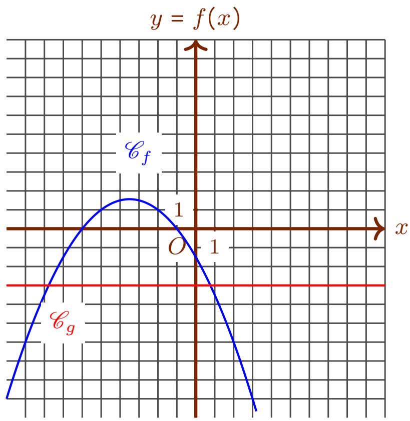
Par lecture nous pouvons conjecturer que

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \mathscr{S} = \{-1; 2\}.}$$

Si pouvons vérifier que -1 et 2 sont effectivement des solutions en remplaçant dans l'équation rien ne garanti que nous ayons toutes les solutions : peut être le graphique ne nous montre-t-il pas tous les points d'ordonnée -9.

Nous en restons donc à une conjecture sans pouvoir affirmer que nous avons résolu l'équation.

2. Avec la calculatrice nous traçons les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto -\frac{1}{4}(x^2 + 7x + 6)$ et $g : x \mapsto -3$.



Exercice 2.

Résolvez graphiquement ou algébriquement (selon ce qui est le plus pertinent) les équations suivantes.

a) (E_1) : $-\frac{1}{3}x + 3 = 1$.

b) (E_2) : $x^2 = 4$.

c) (E_3) : $x^2 = 6$.

d) (E_4) : $3x^2 = 48$.

e) (E_5) : $(x+1)(x-2) = -2$.

f) (E_6) : $5x^3 + x = 13$.

Correction de l'exercice 2

1.
$$\begin{aligned}(E_1) &\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + 3 = 1\\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x + 3 - 3 = 1 - 3\\ &\leftrightarrow -\frac{1}{3}x = -2\\ &\Leftrightarrow -3\times\left(-\frac{1}{3}\right)x = -3\times(-2)\\ &\Leftrightarrow x = 6\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \{6\}.}$$

2. Nous remarquons une équation qui n'est pas linéaire. Nous allons donc essayer de nous ramener à une équation produit-nul.

$$\begin{aligned}(E_2) &\Leftrightarrow x - 4 = 4 - 4\\ &\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0\end{aligned}$$

Nous avons une équation égale à 0 il faut maintenant obtenir un produit, c'est-à-dire factoriser. Nous avonc deux méthodes de factorisation qui restent du collège : facteur commun (autrement dit distributivité) et identié remarquable (uniquement $a^2 - b^2$). Ici il n'y a pas de facteur commun. Par contre :

$$\begin{aligned}(E_2) &\Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0\end{aligned}$$

Nous reconnaissons un produit nul donc :

$$\begin{aligned}(E_2) &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0\\ &\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\mathscr{S}_2 = \{2; -2\}.$$

3. De même

$$(E_3) \iff (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = 0$$

$$\mathscr{S}_3 = \{\sqrt{6}; -\sqrt{6}\}.$$

4. De même

$$(E_4) \iff 3(x - 4)(x + 4) = 0$$

$$\mathscr{S}_4 = \{4; -4\}.$$

5.

$$\begin{aligned}(E_5) &\iff (x+1)(x-2)+2 = -2+2 \\ &\iff (x+1)(x-2)+2 = 0\end{aligned}$$

À ce stade nous bloquons : impossible de factoriser. E désespoire de cause esssayons de tout développer.

$$\begin{aligned}(E_5) &\iff x \times x + x \times (-2) + 1 \times x + 1 \times (-2) + 2 \\ &\iff x^2 - 2x + x - 2 + 2 = 0 \\ &\iff x^2 - x = 0\end{aligned}$$

Maintenant que tout est développé nous recommençons à essayer de factoriser : il y a maintenant un facteur commun.

$$\begin{aligned}&\iff x(x-1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0\end{aligned}$$

$$\mathscr{S}_5 = \{0; 1\}.$$

Exercice 3.

Exercice 50 page 59 du manuel lelivrescolaire.fr.

Correction de l'exercice 3

1. (a) $f(x) = -0,5 \Leftrightarrow x \in \{-0,8\}$.
   (b) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$ admet une unique solution.
2. (a) $f(x) = -0,5 \Leftrightarrow x \in \{0\}$.
   (b) Si $k = 0$, alors $f(x) = k$ admet une unique solution sinon $f(x) = k$ admet deux solutions distinctes (et opposées).
3. (a) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{0\}$.
   (b) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$ admet une unique solution.
4. (a) $f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \{2,3\}$.
   (b) Répondons à la question pour la courbe d).

k	$]-\infty;-1,2[$	$\{1,2\}$	$]-1,2;0[$	$\{0\}$	$]0;+\infty[$
Nombre de solutions de $f(x) = k$.	1	2	3	2	1

Exercice 4.
Exercice 51 page 59 du manuel lelivrescolaire.fr.

Correction de l'exercice 4

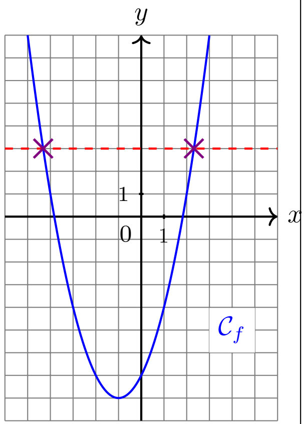
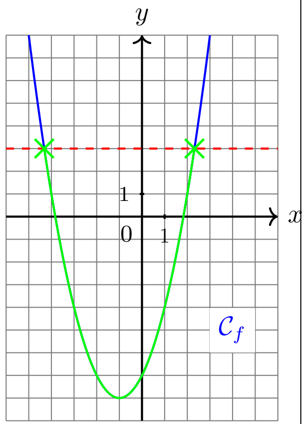
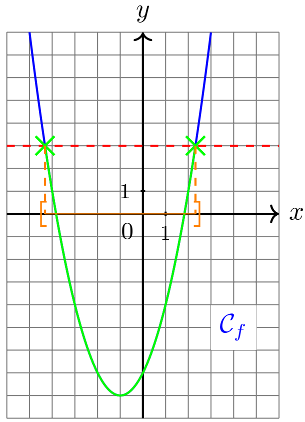
1. $H(1) = 1$. Au bout d'un mois l'arbre mesure 1 mètre.
2. $H(t) > 2$ si et seulement si $t > 2,5$. Ils seront commercialisable lorsque $t \in [2,5;+\infty[$.
3. En année arrondie au bout de 2 ans. En mois : au bout de 19 mois.
4. Tous les 2, 5 mois.

II "Résolution graphique" d'inéquation : $f(x) \leq a$ (avec $a \in \mathbb{R}$).

Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 3$ nous introduisons encore la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array}$ puis traçons sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ avec un logiciel.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 3$ sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée plus petite ou égale à 3.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

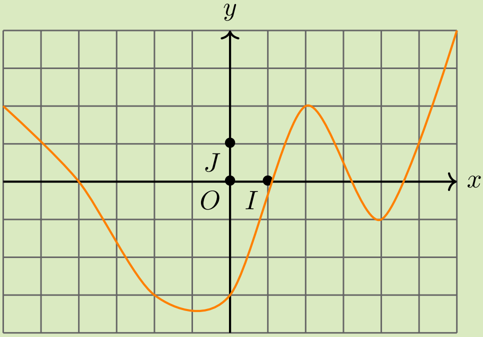
1	2	3
Dessinez l'ordonnée 3.	Identifiez les points de la courbe dont l'ordonnée est plus petite que 3.	Lire les abscisses correspondantes.
		

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 3$ est $[-4,3\ ;\ 2,3]$.

Remarquons enfin que si l'inégalité avait été stricte ($x^2 + 2x - 7 < 3$) l'ensemble des solutions eut été ouvert ($]-4,3\ ;\ 2,3[$).

Exercice 5.

On a dessiné ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.



Résolvez les inéquations :

a) $f(x) \leqslant -3$. b) $f(x) > 1$. c) $f(x) < 0$.

d) $f(x) \leqslant -1$. e) $f(x) \leqslant -4$. f) $f(x) > 2$.

Exercice 6.

Exercice 31 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

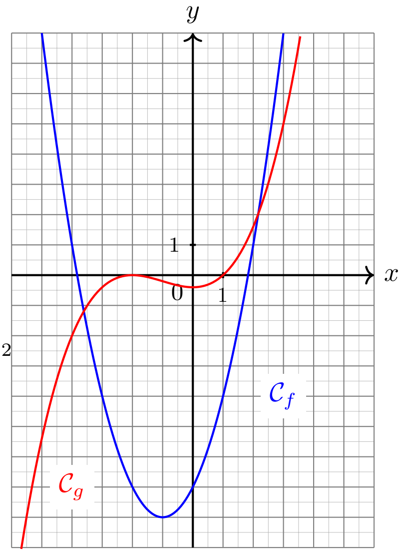
III "Résolution graphique" d'inéquation : $f(x) \leq g(x)$.

Pour conjecturer les solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 0,1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2$ nous introduisons encore les fonctions

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x - 7 \end{array} \quad \text{et}$$

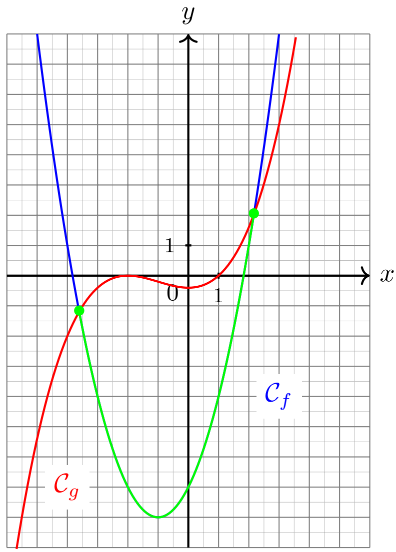
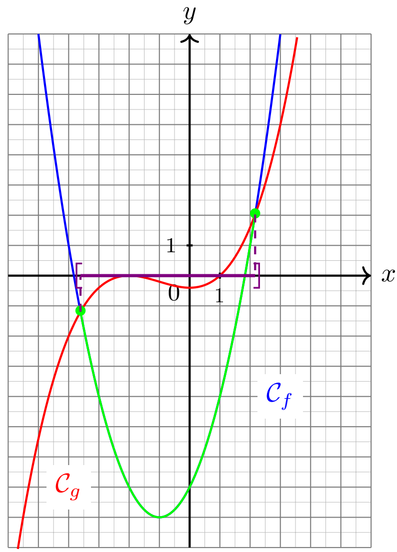
$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0,1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2 \end{array}$$

puis traçons leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ avec un logiciel.



Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de ceux de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Les étapes de la recherche sont les suivantes :

1	2
Identifiez les points de $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de ceux de $\mathcal{C}_g$. 	Lire les abscisses correspondantes. 

Enfin donnez les solutions sous forme d'ensemble : l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 7 \leq 0,1(x+2)^3 - 0.3(x+2)^2$ est $[-3,6\ ;\ 2,2]$.

Exercice 7.
Exercice 33 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.

Exercice 8.
Exercice 35 page 104 du manuel Sesamath : résolution d'inéquations.