

## 13 Moyennes.

Nous allons voir comment calculer la moyenne selon la façon dont les données sont présentées.

### I Série brute

La *moyenne* d'une série est le quotient de la somme des données par le nombre de données.

#### Exercice 1.

Dans une petite entreprise les salaires des 7 employés sont 1 450 €, 1 530 €, 1 800 €, 1 367 €, 1 530 €, 800 € et 2 600 €. Déterminez le salaire moyen dans l'entreprise.

### II Série regroupée par modalités.

#### Définition 1

Les *modalités* d'une série statistiques sont les valeurs différentes de la série. À la *série des modalités* sont associées les *séries des effectifs* (ou des fréquences) et *effectifs cumulés croissants* (ou fréquences cumulées croissantes).

Lorsque la série est regroupée par modalités et série des effectifs

Modalités	$x_1$	$x_1$	...	$x_p$
Effectifs	$n_1$	$n_2$	...	$n_p$

pour calculer la moyenne nous utiliserons la formule de la *moyenne pondérée*

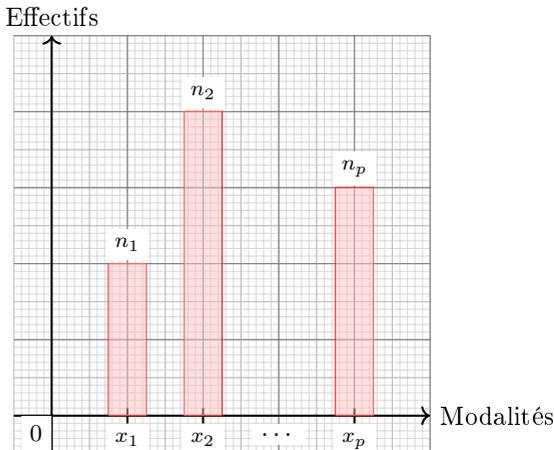
$$\bar{x} = \frac{n_1 \cdot x_1 + \dots + n_p \cdot x_p}{n_1 + \dots + n_p}$$

#### Remarques.

1. Cette formule n'est qu'une autre présentation de la moyenne que vous connaissez déjà.
2. Cette formule est encore valable si à la place des effectifs sont données des fréquences (par exemple des pourcentages). Rappel : la fréquence se calcule comme le quotient de l'effectif par l'effectif total.
3. Nous utiliserons la calculatrice pour effectuer le calcul numérique.

La représentation graphique d'une série regroupée par modalités et effectifs la plus couramment utilisée est celle du diagramme en barre.

La hauteur d'une barre indique l'effectif correspondant à la modalité.



Lorsque les effectifs sont présentés sous forme de pourcentages le diagramme circulaire est souvent utilisé.

### Exercice 2.

Voici les notes obtenues au premier devoir de mathématiques de l'année.

Notes	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	2	1	3	6	2	2	1	1	5

Notes	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectif	1	2	1	4	2	0	1	1

1. Calculez la fréquence du mode de cette série. (Le mode est la modalité ayant l'effectif le plus important).
2. Calculez la moyenne de cette série.
3. Calculez l'étendue.

### Correction de l'exercice 2

1. Calculons la fréquence du mode de la série.

Le mode de la série est le 7 qui apparaît 6 fois. Or l'effectif total est  $N = 2 + 1 + 3 + 6 + \dots + 1 + 1 = 35$ , donc sa fréquence est

$$f_{Mod} = \frac{6}{35} \approx 0,1714.$$

## 2. Calculons la moyenne.

La série étant regroupée par modalités nous utiliserons la formule de la moyenne pondérée.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_r x_r}{n_1 + n_2 + \cdots + n_r} \\ &= \frac{2 \times 4 + 1 \times 5 + \cdots + 1 \times 20}{2 + 1 + \cdots + 1} \\ &= \frac{381}{35} \\ &\approx 10,89\end{aligned}$$

La moyenne des notes de la classe est

$$\bar{x} \approx 10,89 \text{ points.}$$

3. L'étendue est  $e = \max - \min = 20 - 4 = 16$ .

$$e = 16 \text{ points.}$$

## Exercice 3.

Sur le site internet d'une enseigne de vente, on a relevé le prix (en euros) de 43 casques intra-auriculaires.

Prix, $x_i$	8	10	13	15	18	20	21	25
Effectif, $n_i$	2	2	3	15	4	15	1	1

Déterminez la moyenne de la série statistique obtenue.

Correction de l'exercice 3Calculons  $\bar{x}$ .

La série est donnée regroupée par modalités (*i.e.* selon les valeurs identiques et avec les effectifs) donc on la calcule avec la formule de la moyenne pondérée.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} \\ &= \frac{2 \times 8 + 2 \times 10 + \cdots + 1 \times 25}{2 + 2 + \cdots + 1} \\ &\approx 16,70\end{aligned}$$

Le prix moyen d'un casque est de 16,70 euros.

### III Séries regroupées par classes.

#### Définition 2

En statistiques, les *classes* sont des intervalles (souvent semi-ouverts) dans lesquels sont regroupés des valeurs (modalités) de la série.

#### Remarques.

1. Lorsque la série comporte un très grand nombre de modalités (valeurs distinctes de la série), regrouper par modalités ne simplifie pas la situation. C'est dans ce cas que l'on regroupe la série par classe.
2. Nous manipulerons la classe comme une modalité.
3. Nous associerons à la série des classes la série des effectifs (ou des fréquences) ainsi que des effectifs cumulés croissants (ou des fréquences cumulées croissantes).

La *moyenne* d'une série regroupée par classes est la moyenne pondérée de la série des *centres des classes* et des effectifs (ou fréquences associées). Les centres des classes sont les moyennes des bornes des classes : par exemple 4,5 est le centre de  $[2; 7[$ .

#### Exemples.

1. Voici le temps d'attente relevés à la caisse d'une boutique :

Temps (en minutes)	$[0; 5[$	$[5; 10[$	$[10; 20[$
Nombre de clients	19	4	1

Les centres des classes sont  $\bar{x}_1 = \frac{0+5}{2} = 2,5$ ,  $\bar{x}_2 = \frac{5+10}{2} = 7,5$  et  $\bar{x}_3 = \frac{10+20}{2} = 15$ .

Alors la moyenne est

$$\bar{x} = \frac{19 \times 2,5 + 4 \times 7,5 + 1 \times 15}{19 + 4 + 1} \approx 3,854$$

Le temps d'attente est, en moyenne, de 3,8 minutes.

Deux représentations graphiques des séries des classes sont couramment utilisées l'histogramme et le polygone des fréquences cumulées croissantes.

*Histogramme* : sur l'axe des abscisses sont indiquées les bornes des classes et les effectifs sont représentés par des rectangles dont l'aire est proportionnelle aux effectifs. **Il n'y a pas d'unité sur l'axe des ordonnées : ce sont les carrés du quadrillage qui représentent les effectifs.**

## IV Exercices.

### Exercice 4.

Des moines décident de tout partager. Ils mettent en commun les sous dont chacun dispose : 1 523, 2 345, 600, 857, 1 765, 1 365, 1 432, 389, 1 059, 1 391, 1 432, 1 415, 1 399, 1 381, 1 390, 1 408 et 1 370.

Puis il redistribuent équitablement les sous afin que chacun aille de son côté utiliser ces ressources pour des œuvres caritatives. Quelle est la part de sous que recevront chacun d'entre eux ? Comment appelle-t-on en statistique descriptive cette valeur ?

#### Correction de l'exercice 4

- Déterminons la moyenne.

$$\bar{x} \approx 1324,7647.$$

- Déterminons le premier quartile.

(a) Ordonnons la série :  $389 \leq 600 \leq 857 \leq 1059 \leq 1365 \leq 1370 \leq 1381 \leq 1390 \leq 1391 \leq 1399 \leq 1408 \leq 1415 \leq 1432 \leq 1523 \leq 1765 \leq 2345$

(b)  $\frac{1}{4} \times N = \frac{1}{4} \times 17 = 4,25$ .  $Q_1$  est la cinquième valeur.

(c)  $Q_1 = 1365 \text{ €}.$

### Exercice 5.

Dans une ville le nombre de véhicules par foyer est réparti de la façon suivante :

Nombre de véhicules	0	1	2	3	4
Nombre de foyers	267	3 402	19 203	20 471	1 657

Calculez le nombre moyen de véhicules par foyer.

$$\bar{x} \approx 2,411.$$

## Exercice 6.

On a relevé les distances parcourues par deux joueurs de football durant le dernier championnat.

Joueur 1

Distance en km	8	8,5	9	9,5	10	10,5
Nombre de matchs	8	7	3	10	2	8

Joueur 2

Distance en km	8	8,5	9	9,5	10	10,5
Nombre de matchs	0	9	14	7	7	1

1. Représentez sur un même graphique les diagrammes en bâtons associés à ces deux tableaux.
2. Calculez la moyenne des deux joueurs.
3. Déterminez une caractéristique de dispersion de ces deux joueurs.
4. En quoi ces joueurs se distinguent-ils ?

Correction de l'exercice 6

- 1.
2.  $\bar{x}_1 \approx 9,197$  et  $\bar{x}_2 \approx 9,187$ .
3.  $e_1 2,5$  et  $e_2 = 2$ .

## Exercice 7.

Voici le détail des livraisons effectuées par une grande surface de meubles au cours de l'année.

Distance en km	[0; 5[	[5; 10[	[10; 15[	[15; 20[	[20; 25[	[25; 30[	[30; 35[	[35; 60[
Nombre de livraisons	50	250	500	800	700	650	320	230

Le gestionnaire étudie l'équilibre budgétaire du service des livraisons.

- Actuellement il est facturé au client uniquement un forfait de 18 € par livraison et le gestionnaire estime que le coût du kilomètre est de 0,95 €.
  - Calculez l'effectif total et en déduire la recette des livraisons.
  - Estimez le coût total engagé pour assurer toutes les livraisons en utilisant les centres des classes.
  - Montrez que le service des livraisons est déficitaire.
- Le gestionnaire décide de regrouper les livraisons en trois classes :  $[0; 15[$ ,  $[15; 30[$  et  $[30; 60[$ . Le forfait de livraison sera de 17 € pour la première tranche et 21 € pour la deuxième.

Quel forfait minimal (en euro entiers) faut-il fixer pour les livraisons éloignées pour que le service des livraisons soit bénéficiaire ?

## Exercice 8.

On sait que la moyenne de la série est de 2,85.

Valeur	1	2	3	4	5	Total
Effectif	$a$	5	6	$b$	2	20

Calculez les nombres entiers  $a$  et  $b$ .

## Exercice 9.

**Exercice 29 page 19** du manuel Sésamath questions 1 et 2 : regrouper les données par classe (super long), moyenne pondérée d'une série regroupée par classes.

## Exercice 10.

**Exercice 30 page 19** du manuel Sésamath : moyenne pondérée d'une série regroupée par classes.

