11 Géométrie repéré.

I Distance entre points du plan.

1 Repère.

Un repère est une façon de donner des indication numériques sur la position d'un objet géométrique dans le plan.

Il existe d'autres repère, notamment le repérage avec les coordonnées polaires qui est plus adapté pour décrire des trajectoires circulaires.

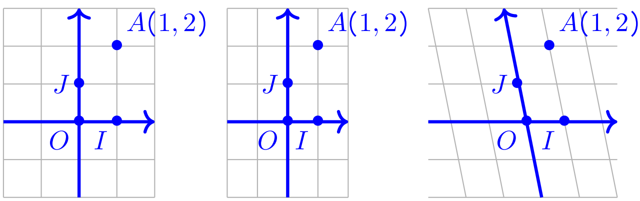
Définition 1

Nous appellerons *repère cartésien du plan* la donnée, dans cet ordre, de trois points O, I et J du plan euclidien non alignés et distincts deux à deux. Nous le noterons (O, I, J).

(i) Le repère (O, I, J) est dit *orthogonal* lorsque le triangle OIJ est rectangle en O.

(ii) Le repère (O, I, J) est dit *orthonormal*, ou *orthonormé*, lorsque le triangle OIJ est isocèle rectangle en O.

Exemples.



Remarques.

1. On pourrait ajouter un nouveau point K et considérer le repère (O, I, J, K) pour passer d'un espace à deux dimensions à un espace à trois dimensions.
2. Dans un couple de coordonnées la première coordonnée est (toujours) l'*abscisse* et la seconde l'*ordonnée*.
3. Nous noterons $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ l'*axe des abscisses* *i.e.* la droite (OI) orientée de O vers I.
   De même nous noterons $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$ l'*axe des ordonnées* *i.e.* la droite (OJ) orientée de O ver J.
   Les notations $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ seront expliquées dans une autre leçon.

2 Distance.

Définition 2

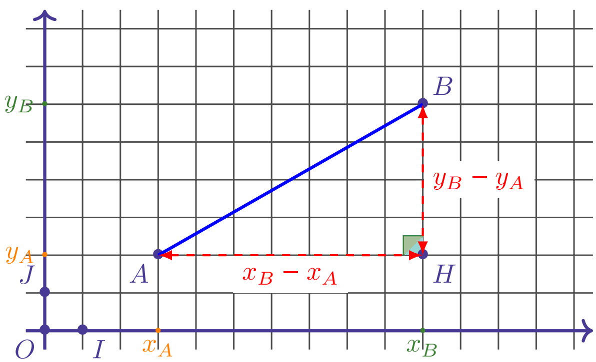
Dans un repère (O, I, J) orthonormé sont placés deux points A et B dont les coordonnées sont respectivement $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.

La distance (euclidienne affine) de A à B est définie par

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Remarques.

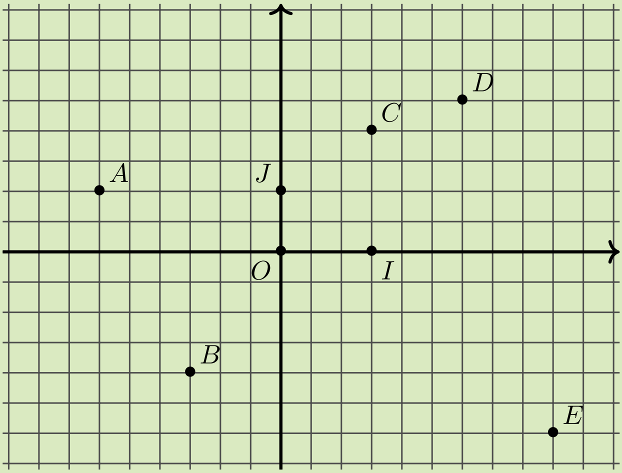
1. Cette formule permet de calculer (les distances donc) les longueurs en géométrie repérée. Elle sera donc utiliser avec des résultats utilisant les longueurs : théorème de Thalès, théorème de Pythagore, calculs d'aires.
2. Cette définition n'est valable que pour les repères orthonormés. Ce peut être un indice dans les exercices.
3. Cette formule généralise la distance vue avec la valeur absolue : pour A et B des points de la droite numérique, $AB = |x_A - x_B| = \sqrt{(x_A - x_B)^2}$. Elle se généralise en trois dimensions comme vous le verrez en terminale : $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$.
4. Cette formule est également appelée formule de la *moyenne géométrique*.
5. Cette formule est ici introduite comme une définition cependant il est possible de faire le lien avec la géométrie classique et les distance sur les axes gradués grâce au théorème de Pythagore :



3 Exercices.

Exercice 1.

Dans le repère (O, I, J) ci-dessous



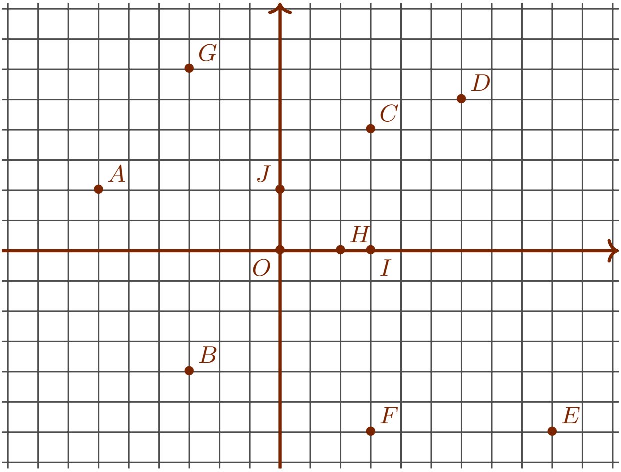
1. déterminez les coordonnées des points A, B, C, D et E ;
2. placez les points
   a) $F(1;-2)$, b) $G(-1;3)$, c) $H\left(\frac{2}{3};0\right)$.

Correction de l'exercice 1

1. Il faut être vigilant : ici le repère n'est pas orthonormé mais simplement orthogonal. Une unité sur l'axe des abscisses correspond à 3 carreaux et une unité sur l'axe des ordonnées correspond à 2 carreaux.

   $A(-2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(1;2)$, $D(2;2,5)$ et $E(3;-3)$.

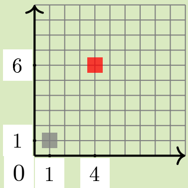
2.



h

Exercice 2.

L'affichage sur un moniteur (écran) est constitué de pixels, *i.e.* de tout petits carrés illuminés d'une seule couleur à la fois.
Il est possible de repérer chaque pixel par ses coordonnées.



Lors de la création d'un jeu vidéo l'affichage d'un personnage sera centré sur un pixel.

Afin de déplacer le personnage (ici le lutin sous Scratch) vers la droite ou vers la gauche le programme suivant est créé.
Le lutin apparaît au pixel de coordonnées $(0, 0)$.

1. Donnez les abscisses et ordonnées du lutin si l'utilisateur appuie sur la touche « bas ».
2. Donnez les abscisses et ordonnées du lutin si l'utilisateur appuie successivement sur la touche « bas », la touche « gauche », la touche « bas » et à nouveau la touche « bas ».
3. Proposez un enchaînement de touches sur lesquelles appuyer afin que le lutin se retrouve au point de coordonnées $(-90, 30)$.
4. Expliquez pourquoi il est impossible que le lutin se retrouve au point de coordonnées $(25, -60)$.
5. Quelle transformation du plan est appliquée au lutin lorsqu'une instruction [ajouter ◯ à ...] est réalisée ?

Correction de l'exercice 2

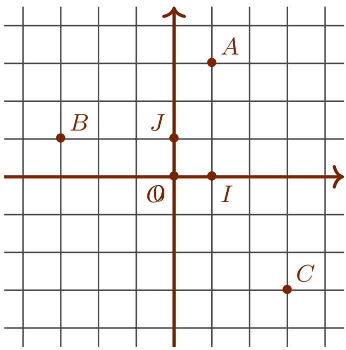
En algorithmique , pour l'instant , les réponses sont relativement peu argumentées. l'essentiel est de lire est comprendre le fonctionnement et le rôle de l'algorithme.

1. Si l'utilisateur appuie sur la touche bas le lutin voit ses coordonnées modifiées (donc il se déplace) la variable y qui représente son ordonnée est diminuée de 10 donc ses nouvelles coordonnées sont $(0; -10)$.
2. Puisqu'on appuie 3 fois sur « bas » et 1 fois sur « gauche » ses nouvelles coordonnées (en partant de l'origine du repère) sont $(-30; -10)$.
3. $-90 = 9 \times (-10)$ donc il a fallu se déplacer 9 fois vers la gauche. Puisque $30 = 3 \times 10$ il a fallu se déplacer 3 fois vers le haut.
4. 25 n'est pas un multiple de 10 il est donc impossible qu'un déplacement conduise à cette position.
5. Le lutin n'est tourné (rotation), il n'est pas retourné (symétrie axiale), il n'est ni agrandi ni réduit par conséquent il s'agit d'une translation.

Exercice 3.

Tracez un repère orthonormé (O, I, J) (1 cm ou un carreau pour unité) puis placez les points : $A(1; 3)$, $B(-3; 1)$ et $C(3, -3)$.

Correction de l'exercice 3



Exercice 4.

Les points $N(1; 1)$, $P(-2; -1)$ et $Q(3; -2)$ sont placés dans un repère orthonormé du plan.
Démontrez que le triangle NPQ est isocèle en N.

Correction de l'exercice 4

NPQ est isocèle en N si et seulement si $NP = NQ$.

Calculons NP et NQ.

Le repère est orthonormé donc

$$\begin{aligned} NP &= \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(1-(-2))^2 + (1-(-1))^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} NQ &= \sqrt{(x_N - x_Q)^2 + (y_N - y_Q)^2} \\ &= \sqrt{(1-3)^2 + (1-(-2))^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

Donc $NP = NQ$ et

NPQ est isocèle en N.

Exercice 5.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), les points $K(-1;7)$, $L(-1;4)$ et $M(3;4)$ sont choisis.
Démontrez que le triangle KLM est rectangle en L.

Correction de l'exercice 5

Démontrons que KLM est rectangle en L.

Nous allons utiliser la réciproque du théorème de Pythagore, en calculant les longueurs des différents côtés.

Puisque le repère est orthonormé

$$\begin{aligned} KL &= \sqrt{(x_K - x_L)^2 + (y_K - y_L)^2} \\ &= \sqrt{(-1-(-1))^2 + ((7-4)^2)^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} LM &= 4 \\ MK &= 5 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{cases} KL^2 + LM^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \\ MK^2 = 5^2 = 25 \end{cases}$$

par transitivité : $KL^2 + LM^2 = MK^2$.

Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore,

KLM est rectangle en L.

Exercice 6.

Dans un repère orthonormé on considère les points $I(4;-50)$ et $M(25;13)$ démontrez que M appartient au cercle de centre I et de rayon $21\sqrt{10}$.

Exercice 7.

Rédigez une fonction Python ou en Scratch qui détermine la longueur AB en fonction des coordonnées des points A et B dans un repère orthonormé.

Correction de l'exercice 7

Voici une fonction en Python qui calcul la longueur AB lorsque $A(x;y)$ et $B(u;v)$.

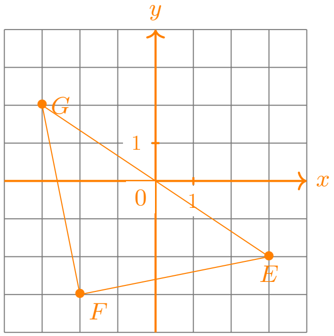
```
from math import *
def dis(x,y,u,v):
print("AB=",sqrt((x-u)**2+(y-v)**2))
```

Exercice 8.

Dans un repère orthonormé, on donne les points : $E(3;-2)$, $F(-2;-3)$, $G(-3;2)$. Quelle est la nature du triangle EFG ?

Correction de l'exercice 8

Dessinons le triangle afin de conjecturer la nature de EFG.



Il semble que EFG soit isocèle rectangle en F.

* Démontrons que EFG est isocèle en F.

Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-2)]^2 + [-2-(-3)]^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} FG &= \sqrt{(x_F - x_G)^2 + (y_F - y_G)^2} \\ &= \sqrt{[-2-(-3)]^2 + (-3-2)^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

Donc : $EF = FG$. Autrement dit

EFG est isocèle en F.

* Démontrons que EFG est de plus rectangle en F.

Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} EG &= \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-3)]^2 + (-2-2)^2} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

Nous avons :

$EG^2 = \sqrt{52}^2$ $= 52$	$EF^2 + FG^2 = \sqrt{26}^2 + \sqrt{26}^2$ $= 52$

et donc : $EG^2 = EF^2 + FG^2$.
Nous en déduisons, d'après le théorème de Pythagore, que

EFG est rectangle en F.

Nous avons démontré que EFG est isocèle rectangle en F.

Exercice 9.

Dans un repère orthonormé du plan sont donnés les points $A(4;2)$, $B(6;-4)$ et $C(0,-2)$.

1. Démontrez que le triangle ABC est isocèle.
2. On note H le pied de la hauteur issue de B. Calculez la longueur AH, puis la longueur BH.

Correction de l'exercice 9

1. Démontrons que ABC est isocèle en B

   .

   Pour cela il suffit de démontrer que $AB = BC$.

   Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(4-6)^2 + (2-(-4))^2} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(6-0)^2 + (-4-(-2))^2} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

   Donc : $AB = BC$ et

   ABC est isocèle en B.

2. Déterminons la longueur AH.

   H n'est pas que le pied de la hauteur issue de B. En effet, ABC est isocèle en B, donc la hauteur issue de B se confond avec la médiane issue de B (par symétrie). Ainsi H est aussi le milieu de $[AC]$. Donc :

$$AH = HC = \frac{AC}{2}$$

Calculons la longueur AC.

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(4-0)^2 + (2-(-2))^2} \\ &= \sqrt{32} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{AH = HC = 2\sqrt{2}.}$$

Déterminons la longueur BH

.

(BH) étant une hauteur de ABC, le triangle ABH est rectangle en H. Nous en déduisons, d'après le théorème de Pythagore que

$$AH^2 + HB^2 = AB^2$$

Cette dernière égalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \sqrt{32}^2 + HB^2 &= \sqrt{40}^2 \\ 32 + HB^2 &= 40 \\ 32 + HB^2 - 32 &= 40 - 32 \\ HB^2 &= 8 \end{aligned}$$

et HB étant une longueur donc positive

$$\begin{aligned} HB &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{BH = 2\sqrt{2}.}$$

Exercice 10.

Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne les points :

$$A(4;3),\ \ B(-1;0) \text{ et } K(3,-1)$$

Montrez que K appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Correction de l'exercice 10

K appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $AK = KB$.

Démontrons que $AK = KB$.

Le repère est orthonormé donc :

$$\begin{aligned} AK &= \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} \\ &= \sqrt{(4-3)^2 + [3-(-1)]^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} KB &= \sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-1)]^2 + (-1-0)^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

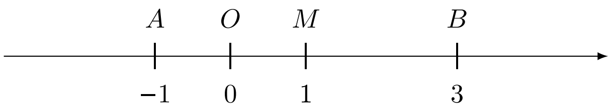
donc : $AK = KB$.
Et par conséquent

$$\boxed{K \text{ appartient à la médiatrice de } [AB].}$$

II Coordonnées du milieu d'un segment.

1 La formule.

Nous allons généraliser un résultat vu avec la valeur absolue.



L'abscisse du milieu, M, de $[AB]$ est $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

Proposition 1

Dans un repère (quelconque) (O, I, J) sont placés deux points A et B dont les coordonnées sont respectivement $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.

Les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

2 Exercices

Exercice 11.

Soient $R(2;5)$ et $S(-256;-1002)$ deux points du plan qu'on a muni d'un repère (O,I,J).
Déterminez précisément le point d'intersection du segment $[RS]$ et de sa médiatrice.

Correction de l'exercice 11

Le point d'intersection de $[RS]$ et de sa médiatrice est le milieu M de $[RS]$.

Déterminons les coordonnées de M.

Puisque M est le milieu de $[RS]$:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_R + x_S}{2} \\ &= \frac{2 + (-256)}{2} \\ &= -127 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_R + y_S}{2} \\ &= \frac{5 + (-1002)}{2} \\ &= -\frac{997}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{M\left(-157; -\frac{997}{2}\right).}$$

Exercice 12.

Soient $A(6;5)$ et $S(2;3)$ deux points d'un repère (O,I,J).
Déterminez les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à S.

Correction de l'exercice 12

A' est le symétrique de A par rapport à S si et seulement si S est le milieu de $[AA']$.

Déterminons les coordonnées de A'.

Puisque S est milieu de $[AA']$ nous devons avoir :

$$x_S = \frac{x_A + x_{A'}}{2}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{6 + x_{A'}}{2} \\
2\times 2 &= \frac{6 + x_{A'}}{2}\times 2 \\
4 &= 6 + x_{A'} \\
4-6 &= 6 + x_{A'}-6 \\
-2 &= x_{A'}
\end{aligned}$$

De même, en travaillant avec les ordonnées, nous obtenons $y_{A'} = 1$.
Enfin :

$$\boxed{A'(-2; 1).}$$

Exercice 13.

Rédigez un programme en Python qui donne les coordonnées du milieu d'un segment dont les coordonnées des extrémités sont connues.

Exercice 14.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; I, J)$. On construit un triangle PAT dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(-2; 4)$, $(0; -1)$ et $(5; -2)$. Le point E est le milieu du segment $[AT]$. La parallèle à (TP) passant par E coupe (PA) en F.
Quelles sont les coordonnées de F ?

Exercice 15.

Considérons un parallélogramme $ABCD$ dans un plan muni d'un repère. Sachant que $A(-1; 7)$, $B(-20; 100)$, $C(3; 107)$ et $D(22; y_D)$, déterminez l'ordonnée y_D du point D.

Correction de l'exercice 15

Déterminons l'ordonnée de D.

Notons M le milieu de $[AC]$.
Nous avons

$$\begin{aligned}
y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} \\
&= \frac{7 + 3}{2} \\
&= 5
\end{aligned}$$

Et puisque M est aussi le milieu de $[BD]$.

$$\begin{aligned}
y_M &= \frac{y_B + y_D}{2} \\
5 &= \frac{-20 + y_D}{2} \\
5\times 2 &= \frac{-20 + y_D}{2}\times 2 \\
10 &= \frac{(-20 + y_D)\times 2}{2\times 1} \\
10 &= -20 + y_D \\
10+20 &= -20 + y_D + 20 \\
30 &= y_D
\end{aligned}$$

$$\boxed{y_D = 30.}$$

Exercice 16.

Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité 1 cm, on considère les points suivants : $A(6; 0)$, $B(0; 4)$ et $C(1; -1)$.

1. Faire une figure.
2. Prouver que le triangle ABC est rectangle.
3. On appelle K le milieu du segment $[AB]$.
   (a) Calculer les coordonnées de K.
   (b) Prouver que K appartient à la médiatrice de $[OC]$.

Correction de l'exercice 16

1.
2. $AB = \sqrt{52}$, $BC = \sqrt{26}$ et $AC = \sqrt{26}$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en C.
3. (a) $K(3; 2)$.
   (b) $KO = OC = \sqrt{13}$.

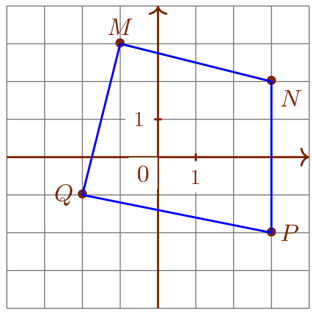
Exercice 17.

Représentez les points proposés dans un repère orthonormé (O, I, J). Conjecturez la nature du quadrilatère ainsi construit puis démontrez cette conjecture.

1. $M(-1;3)$, $N(3;2)$, $P(3,-2)$, $Q(-2,-1)$.
2. $A(1;3)$, $B(5;1)$, $C(3,-1)$, $D(-1;1)$.
3. $E(3;1)$, $F(2;3)$, $G(-4;0)$, $H(-3,-2)$.
4. $P(-3;4)$, $Q(-2;1)$, $R(1;0)$, $S(0;3)$.
5. $U(1;3)$, $V(3,-1)$, $W(-1,-3)$, $S(-3;1)$.

Correction de l'exercice 17

1. Conjecturons le résultat en dessinant la situation.



Le quadrilatère ne semble pas même être un parallélogramme.

2. $ABCD$ semble être un parallélogramme démontrons-le.

Notons M le milieu de $[AC]$. Nous avons

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = 1$$

Donc : $M(2;1)$.

Notons N le milieu de $[BD]$. Nous avons

$$x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{5+(-1)}{2} = 2$$

$$y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Donc : $N(2;1)$

Par conséquent : $M = N$.

Les diagonales de $ABCD$ se coupant en leur milieu nous pouvons affirmer que

$ABCD$ est un parallélogramme.

3. Démontrons que $EFGH$ est un rectangle.

Démontrons tout d'abord que $EFGH$ est un parallélogramme.
Notons I le milieu de $[EG]$. Nous avons

$$x_I = \frac{x_E + x_G}{2} = \frac{3 + (-4)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y_I = \frac{y_E + y_G}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc : $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Notons J le milieu de $[FH]$. Nous avons

$$x_J = \frac{x_F + x_H}{2} = \frac{2 + (-3)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y_J = \frac{y_F + y_H}{2} = \frac{3 + (-2)}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc : $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
Ainsi : $I = J$. Autrement dit les diagonales de $EFGH$ se coupent en leur milieu et donc $EFGH$ est un parallélogramme.

Démontrons que le parallélogramme $EFGH$ est un rectangle.
Il suffit de montrer que, par exemple, ses diagonales sont de même longueur.
(O, I, J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned} EG &= \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2} \\ &= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (1 - 0)^2} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} FH &= \sqrt{(x_F - x_H)^2 + (y_F - y_H)^2} \\ &= \sqrt{[2 - (-3)]^2 + [3 - (-2)]^2} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc : $EG = FH$. $EFGH$ est donc un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

$$\boxed{EFGH \text{ est un rectangle.}}$$

4. Démontrons que $PQRS$ est un losange.

Démontrons tout d'abord que $PQRS$ est un parallélogramme.
Notons I le milieu de $[PR]$. Nous avons

$$x_I = \frac{x_P + x_R}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1 \qquad y_I = \frac{y_P + y_R}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$$

Donc : $I\,(-1;2)$.

Notons J le milieu de $[QS]$. Nous avons

$$x_J = \frac{x_Q + x_S}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 \qquad y_J = \frac{y_Q + y_S}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

Donc : $J\,(-1;2)$.
Ainsi : $I = J$. Autrement dit les diagonales de $PQRS$ se coupent en leur milieu et donc $PQRS$ est un parallélogramme.

Démontrons que le parallélogramme $PQRS$ est un losange.
Il suffit de montrer que, par exemple, que deux côtés consécutifs sont de même longueur.
(O, I, J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \\ &= \sqrt{[-3-(-2))^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2} \\ &= \sqrt{(-2-1)^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Donc : $PQ = QR$. $PQRS$ est donc un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur. Autrement dit :

$PQRS$ est un losange.

5. Démontrons que $UVWS$ est un carré.

Démontrons tout d'abord que $UVWS$ est un parallélogramme.
Notons I le milieu de $[UW]$. Nous avons

$$x_I = \frac{x_U + x_W}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

$$y_I = \frac{y_U + y_W}{2} = \frac{3 + (-3)}{2} = 0$$

Donc : $I\,(0; 0)$.

Notons J le milieu de $[VS]$. Nous avons

$$x_J = \frac{x_V + x_S}{2} = \frac{3 + (-3)}{2} = 0$$

$$y_J = \frac{y_V + y_S}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0$$

Donc : $J\,(0)$.
Ainsi : $I = J$. Autrement dit les diagonales de $PQRS$ se coupent en leur milieu et donc $PQRS$ est un parallélogramme.

Démontrons que le parallélogramme $UVWS$ est un losange.
Il suffit de montrer que, par exemple, que deux côtés consécutifs sont de même longueur.
(O, I, J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned} UV &= \sqrt{(x_U - x_V)^2 + (y_U - y_V)^2} \\ &= \sqrt{(1-3)^2 + [3-(-1)]^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} VW &= \sqrt{(x_V - x_W)^2 + (y_V - y_W)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-1)]^2 + [-1-(-3)]^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc : $UV = VW$. $UVWS$ est donc un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur. Autrement dit c'est un losange.

Démontrons que le losange $UVWS$ est un carré.
Il suffit par exemple de démontrer que $UVWS$ a des diagonales de même longueur.
(O, I, J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned} UW &= \sqrt{(x_U - x_W)^2 + (y_U - y_W)^2} \\ &= \sqrt{[1 - (-1)]^2 + [3 - (-3)]^2} \\ &= \sqrt{85} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} VS &= \sqrt{(x_V - x_S)^2 + (y_V - y_S)^2} \\ &= \sqrt{[3 - (-3)]^2 + (-1 - 1)^2} \\ &= \sqrt{85} \end{aligned}$$

Donc : $UW = VS$. $UVWS$ est donc un losange dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

$UVWS$ est un carré.