

09 Inéquation du premier degré et intervalles.

I Intervalles.

Exercice 1.

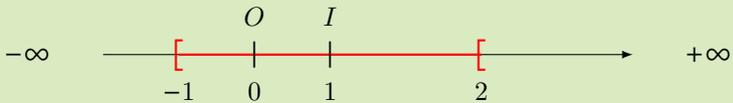
Tracez une droite numérique en plaçant les points suivants d'après leurs abscisses.

- | | | | |
|------------------|--------------------|-----------------------------------|-------------------------|
| a) $O(0)$. | b) $I(1)$. | c) $A(-6)$. | d) $B(2)$. |
| e) $C(-1)$. | f) $D(1,5)$. | g) $E\left(-\frac{1}{2}\right)$. | h) $F(2^2)$. |
| i) $G((-2)^2)$. | j) $J(\sqrt{9})$. | k) $K\left(\frac{1}{3}\right)$. | l) $L(-5 + \sqrt{7})$. |

Exercice 2.

À chaque fois tracez la droite numérique en choisissant OI égale à 1 carreau puis dessinez l'intervalle proposé.

Exemple : $[-1, 3[$ se représente par



- | | | |
|---------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $I_1 = [-3; 0]$. | b) $I_2 = [2, 4]$. | c) $I_3 =] - 2; 1]$. |
| d) $I_4 = [2, +\infty[$. | e) $I_5 =] - \infty, -1]$. | f) $I_6 = \left[-\frac{1}{3}, 4[$. |
| g) $I_7 =] - 4; 3[$. | h) $I_8 =]\sqrt{2}, +\infty[$. | i) $I_9 =] - \infty, -4[$. |

Exercice 3.

À chaque fois tracez la droite numérique en choisissant OI égale à 1 carreau puis dessinez l'intervalle proposé.

- "L'intervalle ouvert en -1 , fermé en 0 ".
- "L'intervalle fermé en -2 et en 3 ".
- "L'intervalle fermé en -4 , $+\infty$ ".
- "L'intervalle ouvert en 4 , $+\infty$ ".
- "L'intervalle $-\infty$, fermé en 3 ".
- "L'intervalle fermé en -4 et ouvert en 2 ".
- "L'intervalle fermé en -4 , $+\infty$ ".
- "L'intervalle $-\infty$, ouvert en 3 ".
- "L'intervalle fermé en -4 , ouvert en -1 ".

Exercice 4.

Dites à chaque fois si le nombre a appartient à l'intervalle I ou pas.

- $a = -1$ et $I =]-\infty, -2]$.
- $a = \pi$ et $I = [3, 05 ; 3, 8]$.
- $a = -3$ et $I = [-3, 245 ; +\infty[$.
- $a = \frac{1}{3}$ et $I = [0; \frac{1}{2}]$.
- $a = 10^3$ et $]1000; +\infty[$.
- $a = -\frac{1}{4}$ et $I =]-\frac{1}{3}; 0[$.
- $a = -2$ et $I = [-4; -2[$.

Correction de l'exercice 4

- $a = -1 \notin]-\infty, -2]$.
- $a = \pi \in [3, 05 ; 3, 8]$.
- $a = -3 \in [-3, 245 ; +\infty[$.
- $a = \frac{1}{3} \in [0; \frac{1}{2}]$.
- $a = 10^3 \notin]1000; +\infty[$.
- $a = -\frac{1}{4} \in]-\frac{1}{3}; 0[$.
- $a = -2 \notin [-4; -2[$.

Exercice 5.

Traduisez la ou les inégalités par une appartenance.

Exemple : $1 < x$ équivaut à $x \in]1, +\infty[$.

- $-6 > x$.
- $12 \leq x \leq 100$.
- $-3 < x \leq 11$.
- $-11 \leq x < -1$.
- $8 > x > \frac{1}{2}$.
- $4 \leq x$.
- $x \geq 10^{-3}$.
- $-\pi < x$.

Correction de l'exercice 5

- a) $-6 > x$ équivaut à $x \in]-\infty; -6[$. b) $12 \leq x \leq 100$ équivaut à $x \in [12; 100]$.
 c) $-3 < x \leq 11$ équivaut à $x \in]-3; +\infty]$. d) $-11 \leq x < -1$ équivaut à $x \in [-11; -1[$.
 e) $8 > x > \frac{1}{2}$ équivaut à $x \in]\frac{1}{2}; 8[$. f) $4 \leq x$ équivaut à $x \in [4; +\infty[$.
 g) $x \geq 10^{-3}$ équivaut à $x \in [10^{-3}; +\infty[$. h) $-\pi < x$ équivaut à $x \in]-\pi; +\infty[$.

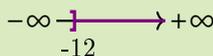
Exercice 6.

Recopiez le tableau, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

Notation	Représentation	Inéquations (encadrement)	Description
$[-2; 13]$		$-2 \leq x \leq 13$	Intervalle fermé en -2 et en 13.
$[4; 8[$
	
...	...	$\pi \leq x < 8$...
...	Intervalle ouvert en -6 et fermé en 2.

Exercice 7.

Recopiez le tableau, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

Notation	Représentation	Inéquations (encadrement)	Description
$[-2, +\infty[$		$-2 \leq x$	Intervalle fermé en -2 , plus l'infini.
$] -\infty; 8[$
	
...	...	$x < \pi$...
...	Intervalle moins l'infini, ouvert en -6 .

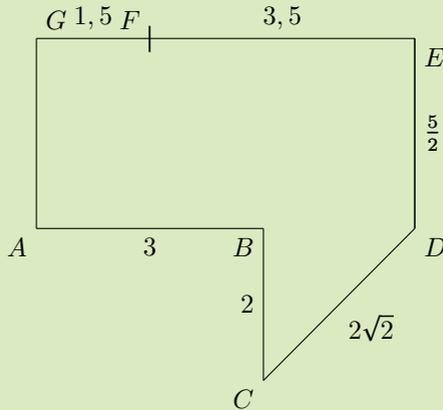
Exercice 8.

Complétez le tableau ci-dessous (les schémas ne doivent pas être à l'échelle).

Notation	Schéma	Inéquation(s)	Description
$] -2; +\infty[$			
			
		$-3 < x \leq 4$	
			Intervalle ouvert en -5 et fermé en 7 .

Exercice 9.

On considère la figure ci-dessous.



Complétez les assertions par un intervalle.

- | | |
|---|---|
| a) Si $M \in [AB]$ alors $AM \in \dots$ | b) Si $M \in [BC]$ alors $BM \in \dots$ |
| c) Si $M \in [CD]$ alors $CM \in \dots$ | d) Si $M \in [DE]$ alors $EM \in \dots$ |
| e) Si $M \in [GF]$ alors $EM \in \dots$ | f) Si $M \in [EF]$ alors $AB + BC + CD + DE + EM \in \dots$ |

Correction de l'exercice 9

- | | |
|--|--|
| a) Si $M \in [AB]$ alors $AM \in [0; 3]$. | b) Si $M \in [BC]$ alors $BM \in [0; 2]$. |
| c) Si $M \in [CD]$ alors $CM \in [0; 2\sqrt{2}]$. | d) Si $M \in [DE]$ alors $EM \in [0; \frac{5}{2}]$. |
| e) Si $M \in [GF]$ alors $EM \in [3; 5]$. | f) Si $M \in [EF]$ alors $AB + BC + CD + DE + EM \in [7, 5 + 2\sqrt{2}; 11 + 2\sqrt{2}]$. |

Exercice 10.

Donnez l'ensemble des solutions des inéquations.

- | | | | |
|-----------------|---------------------|---------------------------|----------------------|
| a) $x < -1$. | b) $3 \geq x$. | c) $\frac{1}{2} \leq x$. | d) $-\sqrt{2} < x$. |
| e) $10^3 > x$. | f) $x \leq 2, 14$. | g) $x > \sqrt{\pi}$. | h) $x \geq -2, 1$. |

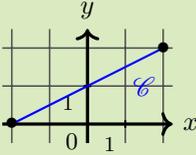
Correction de l'exercice 10

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------|-------------------------------|
| a) $] -\infty; -1[$. | b) $[3; +\infty[$. | c) $[\frac{1}{2}; +\infty[$. |
| d) $] -\sqrt{2}; +\infty[$. | e) $] -\infty; 10^3[$. | f) $] -\infty; 2, 14]$. |
| g) $] \sqrt{\pi}; +\infty[$. | h) $[-2, 1; +\infty[$. | |

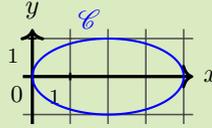
Exercice 11.

Par lecture graphique dites à quels intervalles appartiennent les abscisses et ordonnées d'un point $M(x, y)$ appartenant à la courbe \mathcal{C} .

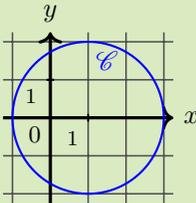
a)



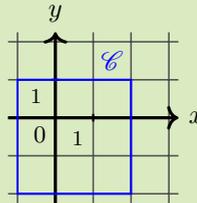
b)



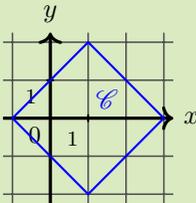
c)



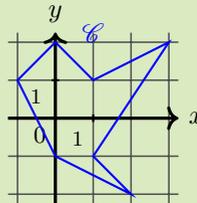
d)



e)



f)

Correction de l'exercice 11

a) $x \in [-2; 2]$ et $y \in [0; 2]$.

b) $x \in [0; 4]$ et $y \in [-1; 1]$.

c) $x \in [-1; 3]$ et $y \in [-2; 2]$.

d) $x \in [-1; 2]$ et $y \in [-2; 1]$.

e) $x \in [-1; 3]$ et $y \in [-2; 2]$.

f) $x \in [-1; 3]$ et $y \in [-2; 2]$.

Exercice 12.

Coloriez l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que

a) $0 \leq x \leq 3$ et $0 \leq y \leq 2$.

b) $-2 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq y \leq 2$.

c) $x \in [-1, 1]$ et $y \in [-2, 1]$.

d) $x \in [-3, -2]$ et $y \in [-1, 0]$.

e) $2x \in [4, 6]$ et $3y \in [-3, 9]$.

f) $x + 5 \in [3, 7]$ et $2x - 6 \in [6, -1]$.

Exercice 13.

II Les règles de manipulation.**III Somme d'inégalités.****IV Exercices.**

Exercice 14.

Résolvez les inéquations.

a) $-3x + 7 < x + 2$

b) $-5x - 2 \leq 0$

c) $-x > 9$

d) $-x + 5 \leq 7 - 6x$

e) $2(3 - x) \geq 8$

f) $2x - 7 < (3x - 4) - x$

g) $3x - (4 + 3x) > 2$

h) $(2x - 1)(2x + 3) \leq (2x + 4)^2$

i) $(x - 1)(3 - x) > 7$.

Correction de l'exercice 14

a)

$$\begin{aligned}
 -3x + 7 < x + 2 &\Leftrightarrow -3x + 7 - x < x + 2 - x \\
 &\Leftrightarrow -4x + 7 < 2 \\
 &\Leftrightarrow -4x + 7 - 7 < 2 - 7 \\
 &\Leftrightarrow -4x < -5 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-4x}{-4} > \frac{-5}{-4} \\
 &\Leftrightarrow x > \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} = \left] \frac{5}{4}; +\infty \right[$.

b)

$$\begin{aligned}
 -5x - 2 \leq 0 &\Leftrightarrow -5x - 2 + 2 \leq 0 + 2 \\
 &\Leftrightarrow -5x \leq 2 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-5x}{-5} \geq \frac{2}{-5} \\
 &\Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left[-\frac{2}{5}; +\infty\right[$.

c)

$$\begin{aligned}
 -x > 9 &\Leftrightarrow \frac{-x}{-1} < \frac{9}{-1} \\
 &\Leftrightarrow x < -9
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; -9[$.

d) $S =]-\infty, \frac{2}{5}]$.

e) $S =]-\infty, -1]$.

f)

$$\begin{aligned}
 2x - 7 < (3x - 4) - x &\Leftrightarrow 2x - 7 < 3x - 4 - x \\
 &\Leftrightarrow 2x - 7 < 2x - 4 \\
 &\Leftrightarrow 2x - 7 - 2x < 2x - 4 - 2x \\
 &\Leftrightarrow -7 < -4
 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours vraie, quelque soit la valeur choisie pour x . Donc :

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \mathbb{R}$.

g)

$$\begin{aligned}
 3x - (4 + 3x) > 2 &\Leftrightarrow 3x - 4 - 3x > 2 \\
 &\Leftrightarrow -4 > 2
 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours fausse, quelque soit la valeur choisie pour x .
Donc :

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \emptyset$.

h)

$$\Leftrightarrow 3x - 3 \leq 16x + 16$$

$$\Leftrightarrow -19 \leq 13x$$

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{19}{13}; +\infty[.$$

i)

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 10 > 0$$

 $\mathcal{S} = ?.$

Exercice 15. E

Trouvez tous les nombres x qui vérifient les deux inéquations (système de deux équations à une inconnue) dans chaque cas :

$$\text{a) } \begin{cases} x + 7 \leq 12 \\ x - 5 \geq -17 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \leq 10 + x \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - 8 \geq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$$

Correction de l'exercice 15

- L'ensemble des solutions de $2x - 8 \leq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 = [-7; +\infty[.$
L'ensemble des solutions de $4x - 23 \leq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 =]-\infty; 11].$
L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [-7; +\infty[\cap]-\infty; 11] = [-7; 11].$
- L'ensemble des solutions de $2x - 8 \geq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 =]-\infty; -7].$
L'ensemble des solutions de $4x - 23 \geq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 = [11; +\infty[.$
L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 =]-\infty; -7] \cap [11; +\infty[= \emptyset.$
- L'ensemble des solutions de $2x - 8 \leq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 = [-7; +\infty[.$
L'ensemble des solutions de $4x - 23 \geq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 = [11; +\infty[.$
L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [-7; +\infty[\cap [11; +\infty[= [11; +\infty[.$

Exercice 16.

- Résolvez l'équation $8x - 4 = 0$.
 - Résolvez l'inéquation $8x - 4 \geq 0$.
- Parfois on ne précise pas l'ensemble de définition d'une fonction g . Dans ce cas l'ensemble des définition est l'ensemble des nombres x pour lesquels $g(x)$ existe.
Déduisez de la question 1 les ensembles de définition des fonctions suivantes.

- $g : x \mapsto \frac{1}{8x - 4}$.

- $h : x \mapsto \sqrt{8x + 4}$.

Correction de l'exercice 16

- $x = \frac{1}{2}$.
 - $[\frac{1}{2}, +\infty[$.
- $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
 - $\mathcal{D}_h = [\frac{1}{2}, +\infty[$.

Exercice 17.

Un particulier a des marchandises à faire transporter. Un premier transporteur lui demande 460 € au départ et 3,50 € par kilomètre. Un second transporteur lui demande 1000 € au départ et 2 euro par kilomètre.
Pour quelles distances à parcourir est-il plus avantageux de s'adresser au second transporteur ?

Correction de l'exercice 17

$$3,5x + 460 \geq 2x + 1000 \Leftrightarrow x \geq \frac{1000-460}{1,5} \Leftrightarrow x \geq 360$$

Exercice 18.

Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 750 € par jour et les frais de fabrication s'élèvent à 3,75 € par livre.
Combien faut-il imprimer de livre par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 6 €.

Correction de l'exercice 18

$$3,75x + 750 \leq 6x \Leftrightarrow \frac{750}{6-3,75} \leq x \Leftrightarrow \frac{1000}{3} \leq x.$$

Exercice 19.

