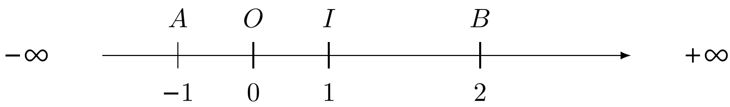
09 Inéquation du premier degré et intervalles.

I Intervalles.

L'ensemble de tous les nombres est noté $\mathbb{R}$. On le représente géométriquement par un axe appelé *droite numérique* :



Tout point de la droite est associé à un nombre et tout nombre est associé à un point de la droite. Le point A est associé au nombre -1 et le nombre 2 est associé au point B.

Les points O et I jouent un rôle particulier : ils indiquent la longueur 1 et le sens croissant sur la droite. On dit que (O, I) est un *repère* de la droite numérique. Le nombre associé à un point est appelé son *abscisse*.

Aux segments et demi-droites contenus dans la droite numérique on associe des ensembles de nombres appelés *intervalles*.

Soit M un point de la droite numérique d'abscisse x ce qui sera noté $M(x)$.

- Si $M \in [AB]$ alors $-1 \leqslant x \leqslant 2$ et nous écrirons $x \in [-1; 2]$. $[-1; 2]$ est appelé "l'intervalle fermé en -1 et fermé en 2".
- Si $M \in (AB]$ alors $x \leqslant 2$ et nous écrirons $x \in]-\infty, 2]$. $]-\infty, 2]$ est appelé "l'intervalle moins l'infini, fermé en 2".
- Si $M \in [AB]$ mais que M n'est pas A alors $-1 < x \leqslant 2$ et nous écrirons $x \in]-1; 2]$. $]-1; 2]$ est appelé "l'intervalle ouvert en -1 et fermé en 2".

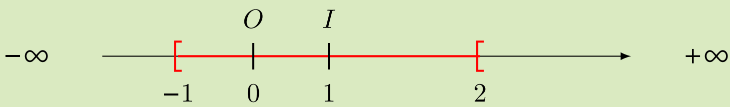
Exercice 1.

Tracez une droite numérique en plaçant les points suivants d'après leurs abscisses.

a) $O(0)$.	b) $I(1)$.	c) $A(-6)$.	d) $B(2)$.
e) $C(-1)$.	f) $D(1,5)$.	g) $E\left(-\frac{1}{2}\right)$.	h) $F\left(2^2\right)$.
i) $G\left((-2)^2\right)$.	j) $J\left(\sqrt{9}\right)$.	k) $K\left(\frac{1}{3}\right)$.	l) $L\left(-5+\sqrt{7}\right)$.

Exercice 2.

À chaque fois tracez la droite numérique en choisissant OI égale à 1 carreau puis dessinez l'intervalle proposé.
Exemple : $[-1, 3[$ se représente par



a) $I_1 = [-3; 0]$.
b) $I_2 = [2, 4]$.
c) $I_3 =]-2; 1]$.
d) $I_4 = [2, +\infty[$.
e) $I_5 =]-\infty, -1]$.
f) $I_6 = \left[-\frac{1}{3}, 4\right[$.
g) $I_7 =]-4; 3[$.
h) $I_8 = \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$.
i) $I_9 =]-\infty, -4[$.

Exercice 3.

À chaque fois tracez la droite numérique en choisissant OI égale à 1 carreau puis dessinez l'intervalle proposé.

a) "L'intervalle ouvert en -1, fermé en 0".
b) "L'intervalle fermé en -2 et en 3".
c) "L'intervalle fermé en -4, $+\infty$".
d) "L'intervalle ouvert en 4, $+\infty$".
e) "L'intervalle $-\infty$, fermé en 3".
f) "L'intervalle fermé en -4 et ouvert en 2".
g) "L'intervalle fermé en -4, $+\infty$".
h) "L'intervalle $-\infty$, ouvert en 3".
i) "L'intervalle fermé en -4, ouvert en -1".

Exercice 4.

Dites à chaque fois si le nombre a appartient à l'intervalle I ou pas.

a) $a = -1$ et $I =]-\infty, -2]$.
b) $a = \pi$ et $I = [3,05 : 3,8]$.
c) $a = -3$ et $I = [-3,245; +\infty[$.
d) $a = \frac{1}{3}$ et $I = \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
e) $a = 10^3$ et $]1000; +\infty[$.
f) $a = -\frac{1}{4}$ et $I = \left]-\frac{1}{3}, 0\right[$.
g) $a = -2$ et $I = [-4; -2[$.

Correction de l'exercice 4

a) $a = -1 \notin]-\infty, -2]$.
b) $a = \pi \in [3,05; 3,8]$.
c) $a = -3 \in [-3,245; +\infty[$.
d) $a = \frac{1}{3} \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
e) $a = 10^3 \notin]1000; +\infty[$.
f) $a = -\frac{1}{4} \in \left]-\frac{1}{3}, 0\right[$.
g) $a = -2 \notin [-4; -2[$.

Exercice 5.

Traduisez la ou les inégalités par une appartenance.
Exemple : $1 < x$ équivaut à $x \in]1, +\infty[$.

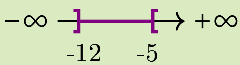
a) $-6 > x$.
b) $12 \leqslant x \leqslant 100$.
c) $-3 < x \leqslant 11$.
d) $-11 \leqslant x < -1$.
e) $8 > x > \frac{1}{2}$.
f) $4 \leqslant x$.
g) $x \geqslant 10^{-3}$.
h) $-\pi < x$.

Correction de l'exercice 5

a) $-6 > x$ équivaut à $x \in x \in]-\infty; -6[$.
b) $12 \leqslant x \leqslant 100$ équivaut à $x \in [12; 100]$.
c) $-3 < x \leqslant 11$ équivaut à $x \in]-3; +\infty$.
d) $-11 \leqslant x < -1$ équivaut à $x \in [-11; -1[$.
e) $8 > x > \frac{1}{2}$ équivaut à $x \in \left]\frac{1}{2}; 8\right[$.
f) $4 \leqslant x$ équivaut à $x \in [4; +\infty[$.
g) $x \geqslant 10^{-3}$ équivaut à $x \in [10^{-3}; +\infty[$.
h) $-\pi < x$ équivaut à $x \in]-\pi; +\infty[$.

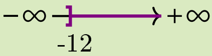
Exercice 6.

Recopiez le tableau, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

Notation	Représentation	Inéquations (encadrement)	Description
$[-2; 13]$		$-2 \leq x \leq 13$	Intervalle fermé en -2 et en 13.
$[4\ ;\ 8[$	...	...	...
		...	...
...	...	$\pi \leq x < 8$	...
...	...	...	Intervalle ouvert en -6 et fermé en 2.

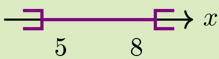
Exercice 7.

Recopiez le tableau, puis complétez-le en prenant pour modèle la deuxième ligne.

Notation	Représentation	Inéquations (encadrement)	Description
$[-2, +\infty[$		$-2 \leq x$	Intervalle fermé en -2, plus l'infini.
$]-\infty;\ 8[$	...	...	...
		...	...
...	...	$x < \pi$	...
...	...	...	Intervalle moins l'infini, ouvert en -6.

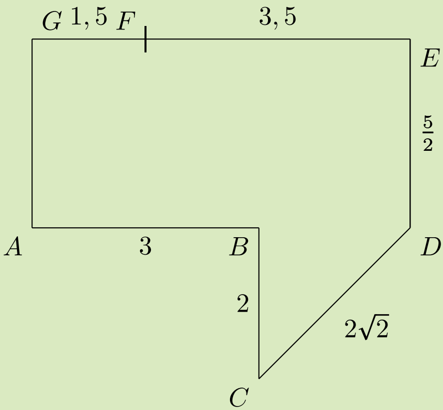
Exercice 8.

Complétez le tableau ci-dessous (les schémas ne doivent pas être à l'échelle).

Notation	Schéma	Inéquation(s)	Description
$]-2\ ;\ +\infty[$			
			
		$-3 < x \leq 4$	
			Intervalle ouvert en -5 et fermé en 7.

Exercice 9.

On considère la figure ci-dessous.



Complétez les assertions par un intervalle.

a) Si $M \in [AB]$ alors $AM \in \ldots$.

b) Si $M \in [BC]$ alors $BM \in \ldots$.

c) Si $M \in [CD]$ alors $CM \in \ldots$.

d) Si $M \in [DE]$ alors $EM \in \ldots$.

e) Si $M \in [GF]$ alors $EM \in \ldots$.

f) Si $M \in [EF]$ alors $AB + BC + CD + DE + EM \in \ldots$.

Correction de l'exercice 9

a) Si $M \in [AB]$ alors $AM \in [0; 3]$.

b) Si $M \in [BC]$ alors $BM \in [0; 2]$.

c) Si $M \in [CD]$ alors $CM \in [0; 2\sqrt{2}]$.

d) Si $M \in [DE]$ alors $EM \in \left[0; \frac{5}{2}\right]$.

e) Si $M \in [GF]$ alors $EM \in [3; 5]$.

f) Si $M \in [EF]$ alors $AB + BC + CD + DE + EM \in [7,5 + 2\sqrt{2}; 11 + 2\sqrt{2}]$.

Exercice 10.

Donnez l'ensemble des solutions des inéquations.

a) $x < -1$.

b) $3 \geqslant x$.

c) $\frac{1}{2} \leqslant x$.

d) $-\sqrt{2} < x$.

e) $10^3 > x$.

f) $x \leqslant 2,14$.

g) $x > \sqrt{\pi}$.

h) $x \geqslant -2,1$.

Correction de l'exercice 10

a) $]-\infty; -1[$.

b) $[3; +\infty[$.

c) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

d) $]-\sqrt{2}; +\infty[$.

e) $]-\infty; 10^3[$.

f) $]-\infty; 2,14]$.

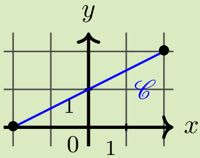
g) $]\sqrt{\pi}; +\infty[$.

h) $[-2,1; +\infty$.

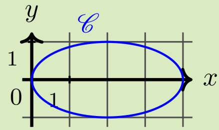
Exercice 11.

Par lecture graphique dites à quels intervalles appartiennent les abscisses et ordonnées d'un point $M(x,y)$ appartenant à la courbe $\mathscr{C}$.

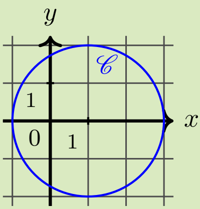
a)



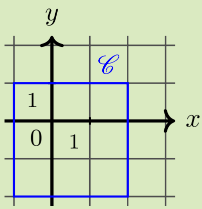
b)



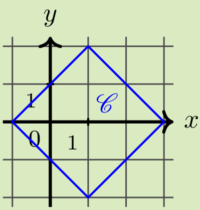
c)



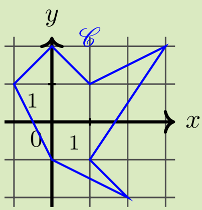
d)



e)



f)



Correction de l'exercice 11

a) $x \in [-2;2]$ et $y \in [0;2]$.

b) $x \in [0;4]$ et $y \in [-1;1]$.

c) $x \in [-1;3]$ et $y \in [-2;2]$.

d) $x \in [-1;2]$ et $y \in [-2;1]$.

e) $x \in [-1;3]$ et $y \in [-2;2]$.

f) $x \in [-1;3]$ et $y \in [-2;2]$.

Exercice 12.

Coloriez l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que

a) $0 \leqslant x \leqslant 3$ et $0 \leqslant y \leqslant 2$.

b) $-2 \leqslant x \leqslant 3$ et $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

c) $x \in [-1,1]$ et $y \in [-2,1]$.

d) $x \in [-3,-2]$ et $y \in [-1,0]$.

e) $2x \in [4,6]$ et $3y \in [-3,9]$.

f) $x+5 \in [3,7]$ et $2x-6 \in [6,-1]$.

Exercice 13.

II Les règles de manipulation.

Théorème 1

- (i) On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en ajoutant ou en soustrayant le même nombre à chaque membre de celle-ci.
- (ii) On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en multipliant ou en divisant par un même nombre strictement positif chaque membre de celle-ci.
- (iii) Pour ne pas modifier l'ensemble des solutions d'une inéquation en multipliant ou en divisant par un même nombre strictement négatif des deux côtés de l'inégalité il faut changer le sens de l'inégalité.

Remarques.

1. Ce sont les même règles que pour les équations hormis le cas de la multiplication (ou division) par un nombre strictement négatif.
2. Nous pourrons donc résoudre les inéquations du premier degré comme nous le faisions pour les équations du premier degré en isolant l'inconnue.

Exemples.

1.

$$x - 7 \geq 12$$

équivaut successivement à

$$x - 7+7 \leqslant 12+7$$
$$x \leqslant 19$$
$$x \in]-\infty; 19]$$

2. $3x \leq 12$.
3. $-4x \geq 32$.

III Somme d'inégalités.

Il est possible d'ajouter des égalités membre à membre. On peut également ajouter des inégalités si elles sont dans le même sens.

Proposition 1

Soient a, b, u et v des réels.

Si $\begin{cases} a \leqslant b \\ u \leqslant v \end{cases}$, alors $a + u \leqslant b + v$.

Démonstration

La somme de deux nombres positifs est un nombre positif donc $(b-a)+(v-u) \geqslant 0$.

D'où : $b + v \geqslant a + u$.

■

Remarques.

1. Il est possible de donner des variantes : si $\begin{cases} a < b \\ u \leqslant v \end{cases}$, alors $a + u < b + v$.

   Ou encore : Si $\begin{cases} a < b \\ u < v \end{cases}$, alors $a + u < b + v$.

IV Exercices.

Exercice 14.

Résolvez les inéquations.

a) $-3x + 7 < x + 2$

b) $-5x - 2 \leq 0$

c) $-x > 9$

d) $-x + 5 \leqslant 7 - 6x$

e) $2(3 - x) \geqslant 8$

f) $2x - 7 < (3x - 4) - x$

g) $3x - (4 + 3x) > 2$

h) $(2x - 1)(2x + 3) \leqslant (2x + 4)^2$

i) $(x - 1)(3 - x) > 7$.

Correction de l'exercice 14

a)

$$\begin{aligned}
-3x+7<x+2 &\Longleftrightarrow -3x+7-x<x+2-x \\
&\Longleftrightarrow -4x+7<2 \\
&\Longleftrightarrow -4x+7-7<2-7 \\
&\Longleftrightarrow -4x<-5 \\
&\Longleftrightarrow \frac{-4x}{-4}>\frac{-5}{-4} \\
&\Longleftrightarrow x>\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=\left]\frac{5}{4};+\infty\right[$.

b)

$$\begin{aligned}
-5x-2\leq 0 &\Longleftrightarrow -5x-2+2\leq 0+2 \\
&\Longleftrightarrow -5x\leq 2 \\
&\Longleftrightarrow \frac{-5x}{-5}\geq\frac{2}{-5} \\
&\Longleftrightarrow x\geq -\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=\left[-\frac{2}{5};+\infty\right[$.

c)

$$\begin{aligned}
-x>9 &\Longleftrightarrow \frac{-x}{-1}<\frac{9}{-1} \\
&\Longleftrightarrow x<-9
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=\left]-\infty;-9\right[$.

d) $\mathcal{S}=\left]-\infty,\frac{2}{5}\right]$.

e) $\mathcal{S}=\left]-\infty,-1\right]$.

f)

$$\begin{aligned}
2x-7<(3x-4)-x &\Longleftrightarrow 2x-7<3x-4-x \\
&\Longleftrightarrow 2x-7<2x-4 \\
&\Longleftrightarrow 2x-7-2x<2x-4-2x \\
&\Longleftrightarrow -7<-4
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours vraie, quelque soit la valeur choisie pour x. Donc :
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=\mathbb{R}$.

g)

$$\begin{aligned} 3x-(4+3x)>2 &\Leftrightarrow 3x-4-3x>2 \\ &\Leftrightarrow -4>2 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours fausse, quelque soit la valeur choisie pour x. Donc :

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=\varnothing$.

h)

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 3x-3\leqslant 16x+16 \\ &\Leftrightarrow -19\leqslant 13x \end{aligned}$$

$\mathcal{S}=\left[-\frac{19}{13};+\infty\right[$.

i)

$$\Leftrightarrow x^2+4x-10>0$$

$\mathcal{S}=?$.

Exercice 15. E

Trouvez tous les nombres x qui vérifient les deux inéquations (système de deux équations à une inconnue) dans chaque cas :

a) $\begin{cases} x+7\leq 12 \\ x-5\geq -17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-8\leq 5x+13 \\ 4x-23\leq 10+x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-8\geq 5x+13 \\ 4x-23\geq 10+x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-8\leq 5x+13 \\ 4x-23\geq 10+x \end{cases}$

Correction de l'exercice 15

1. L'ensemble des solutions de $2x-8\leq 5x+13$ est $\mathcal{S}_1=[-7;+\infty[$.
   L'ensemble des solutions de $4x-23\leq 10+x$ est $\mathcal{S}_2=]-\infty;11]$.
   L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2=[-7;+\infty[\cap]-\infty;11]=[-7;11]$.
2. L'ensemble des solutions de $2x-8\geq 5x+13$ est $\mathcal{S}_1=]-\infty;-7]$.
   L'ensemble des solutions de $4x-23\geq 10+x$ est $\mathcal{S}_2=[11;+\infty[$.
   L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2=]-\infty;-7]\cap[11;+\infty[=\varnothing$.

3. L'ensemble des solutions de $2x - 8 \leq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 = [-7; +\infty[$.
   L'ensemble des solutions de $4x - 23 \geq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 = [11; +\infty[$.
   L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [-7; +\infty[\cap [11; +\infty[= [11; +\infty[$.

Exercice 16.

1. (a) Résolvez l'équation $8x - 4 = 0$.
   (b) Résolvez l'inéquation $8x - 4 \geqslant 0$.
2. Parfois on ne précise pas l'ensemble de définition d'une fonction g. Dans ce cas l'ensemble des définition est l'ensemble des nombres x pour lesquels $g(x)$ existe.
   Déduisez de la question 1 les ensembles de définition des fonctions suivantes.
   (a) $g : x \mapsto \dfrac{1}{8x-4}$.
   (b) $h : x \mapsto \sqrt{8x+4}$.

Correction de l'exercice 16

1. (a) $x = \frac{1}{2}$.
   (b) $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
2. (a) $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
   (b) $\mathscr{D}_h = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Exercice 17.

Un particulier a des marchandises à faire transporter. Un premier transporteur lui demande 460 € au départ et 3, 50 € par kilomètre. Un second transporteur lui demande 1000 € au départ et 2 euro par kilomètre.
Pour quelles distances à parcourir est-il plus avantageux de s'adresser au second transporteur ?

Correction de l'exercice 17

$3,5x + 460 \geqslant 2x + 1000 \iff x \geqslant \frac{1000-460}{1,5} \iff x \geqslant 360$

Exercice 18.

Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 750 € par jour et les frais de fabrication s'élèvent à 3, 75 € par livre.
Combien faut-il imprimer de livre par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 6 €.

Correction de l'exercice 18

$3,75x + 750 \leqslant 6x \iff \frac{750}{6-3,75} \leqslant x \iff \frac{1000}{3} \leqslant x.$

Exercice 19.