

## 08 Développer des expressions polynomiales.

### I Les polynômes.

#### Exercice 1. C

Donnez la forme réduite des polynômes suivants :

1.  $-3X^2 + 7X - 4X + 12X^3 + 2$
2.  $7X^{25} - 8X + 3 + X - 7X + 12$
3.  $3X^2 + 2X + 4X + 12$

#### Exercice 2. C

Donnez la forme ordonnée et réduite des polynômes suivants :

1.  $4X^3 - 2X^2 + 7X - 14 + 3X$
2.  $23 + X + X^2$
3.  $3X + 4X^2 + 9X + 9$

### II Développer.

- 1 Développer, réduire et ordonner.
- 2 La boîte à outil pour développer.

### III Exercice.

#### Exercice 3.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions suivantes.

- |                               |                              |
|-------------------------------|------------------------------|
| a) $A(x) = 4x(x + 3).$        | b) $B(x) = (3 + x)(2x - 1).$ |
| c) $C(x) = (x + 3)^2.$        | d) $D(x) = (2x - 4)^2.$      |
| e) $E(x) = (-x + 5)(-x - 5).$ |                              |

## Exercice 4.

Développez, réduisez puis ordonnez les expressions suivantes :

1.  $A(x) = (x - 1)(x - 2)$

2.  $B(x) = (11x - 12)^2$

3.  $C(x) = (x + 5)^2$

4.  $D(x) = (x - 5)^2$

5.  $E(x) = (x + 5)(x - 5)$

6.  $F(x) = (2x - 7)^2$

7.  $G(x) = (3 + 2x)^2$

8.  $H(x) = (11 - x)(11 + x)$

9.  $I(x) = \left(3x + \frac{5}{6}\right)^2$

10.  $J(x) = \left(7x - \frac{1}{3}\right)^2$

11.  $K(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)$

12.  $L(x) = (5 - 11x)^2$

13.  $M(x) = (12 + 13x)^2$

14.  $N(x) = (9x - 4)(4 + 9x)$

15.  $O(x) = \left(10x + \frac{1}{3}\right)^2$

16.  $P(x) = (-x + 1, 2)^2$

17.  $Q(x) = (0, 7 - x)(0, 7 + x)$

18.  $R(x) = (x - 2)(x^2 + 3) - (x + 2)x^2$

## Exercice 5.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

1.  $A(X) = (3X + 4)(X - 5),$

2.  $B(X) = 12(X - 3) - 14(X + 4),$

3.  $C(X) = 11(X - 9) - 7(X - 1),$

4.  $D(X) = 28X(3X^2 - 4X + 12),$

5.  $E(X) = 3, 2X^2(5X^2 - 12X - 1, 1),$

6.  $F(X) = -2X(3X - X + 2),$

7.  $G(X) = 5X(X - 3),$

8.  $H(X) = 3X^2(2X^2 - X + 4),$

9.  $K(X) = (X + 3)(X + 4),$

10.  $L(X) = (2X + 1)(X + 2),$

11.  $M(X) = (3X - 2)(2X + 3),$

12.  $N(X) = (X - 5)(X - 2),$

13.  $P(X) = (2X - 1)(4X + 3),$

14.  $Q(X) = (2X - 7)^2,$

15.  $R(X) = (5X - 2)(X + 4),$

16.  $S(X) = (3X + 1, 5)(2X - 3),$

17.  $T(X) = (5X - 7)(0, 5X - 1, 2),$

18.  $U(X) = (2X - 1, 1)(X + 4),$

19.  $V(X) = (X - 7)(X + 7).$

## Exercice 6.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

1.  $A(x) = (2X - 3)^2$ ,
2.  $B(X) = [(2X^2 - 2X + 3) - (2X^2 + 3)](5X^2 - 4X + 3)$ ,
3.  $C(X) = (3X - 1)(5X - 2) + (X + 2)^2$ ,
4.  $D(X) = (5X - 3)(3X + 1) - (2X - 4)(-X + 5)$ ,
5.  $E(X) = (1,5X - 5)(1,5X + 5) - (X - 1)^2$ ,
6.  $F(X) = (5X + 2)^2 - (X - 3)^2$ ,
7.  $G(X) = (3X - 2)^2 - (5 - 4X)(4 - 6X)$ ,
8.  $H(X) = (X - 1)(2X + 3) + (X - 1)(X + 2)$ ,
9.  $I(X) = (2X - 5)(2X + 5)$ ,
10.  $J(X) = (3X + 1)(7X - 2) + (X - 2)^2$ ,
11.  $K(X) = (4X - 3)(3X + 2) - (2X + 5)(X - 3)$ ,
12.  $L(X) = (1,5X - 2)(1,5X + 2) - (X + 3)^2$ ,
13.  $M(X) = (3X - 2)^2 - (X - 4)^2$ ,
14.  $N(X) = (3X + 1)^2 - (5 - 4X)(2 + 3X)$ ,
15.  $P(X) = (X - 1)(2X + 2) + (X - 1)(2X + 2)$ ,
16.  $Q(X) = (X + 1)(X - 3) + (X + 1)(3X + 1)$ ,
17.  $R(X) = (2X - 4)(X - 1) - (X - 2)(3X + 2)$ ,
18.  $S(X) = (X - 3)(X + 2) - (X - 2)(2X + 1)$ ,
19.  $T(X) = (X + 1)(X - 4) - (2X + 8)(X + 5)$ ,
20.  $U(X) = (3X - 2)^2 - (5X - 4)(2 + 3X)$ ,
21.  $V(X) = (X + 2)(2X - 3) + (X - 1)(X + 2)$ .

## Exercice 7.

Démontrez les égalités proposées, valables pour tout  $x$  réel.

1.  $(-2x + 8)(x - 7) = -2x^2 + 22x - 56$ ,
2.  $-9 + 6x + 3x^2 = -3(1 - x)(x + 3)$ ,
3.  $-3(x - 3)^2 + 3 = -3(x - 4)(x - 2)$ .

## Exercice 8. C

Vérifiez que les trois formes proposées,  $A$ ,  $B$  et  $C$ , correspondent à une même expression polynomiale.

1.  $A(x) = (x - 3)(x + 5)$ .

$B(x) = x^2 + 2x - 15$ .

$C(x) = (x + 1)^2 - 16$ .

2.  $A(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 6$ .

$B(x) = (x - 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ .

$C(x) = (x - \sqrt{2})^2 - 8$

3.  $A(x) = 2x^2 + 3x - 2$ .

$B(x) = (2x - 1)(x + 2)$ .

$C(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$ .

## Exercice 9. E

Est-il possible que  $x^2 - 3x + 4$  s'écrive pour tout  $x$  réel comme un produit de la forme  $(x + 1)(ax + b)$  avec  $a$  et  $b$  réels ?

## Exercice 10. E

À la calculatrice, une instruction  $x \wedge 3$  compte pour 2 multiplications :  $x \wedge 3 = x \times x \times x$ .

## 1. Premier exemple.

Soit  $f(x) = x^2 + 4x + 3$  sur  $\mathbb{R}$  (forme  $A$ ).

(a) Vérifiez que  $f(x) = 3 + x(x + 4)$  pour tout  $x$  réel (forme  $H$ ).

(b) Combien d'opérations sont effectuées avec la forme  $A$ ? avec la forme  $H$ ?

(c) On programme le calcul de  $f(x)$  pour  $x$  variant de 0 à 2 avec un pas de 0,1. Combien d'opérations sont nécessaires avec chacune des deux formes ?

## 2. Deuxième exemple.

Reprendre les questions  $a$ ,  $b$  et  $c$  de la question 1 pour  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$  (forme  $A$ ) et  $f(x) = -1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x)))$  (forme  $H$ ).

## 3. Troisième exemple.

Soit  $f(x) = 4x^7 + 2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ .

(a) Proposer la forme  $H$  associée.

(b) Reprendre les questions 1(b) et 1(c).

4. Quel est le gain obtenu en nombre d'opérations pour  $f(x) = x^{50} + x^{49} + x^{48} + \dots + x^2 + x + 1$  ?

On pourra programmer un algorithme pour effectuer un calcul de ce gain.

## Exercice 11. E

Soit  $x$  un nombre réel différent de 1, démontrez que

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1 - x^5}{1 - x}.$$