08 Développer des expressions polynomiales.

I Les polynômes.

Les monômes sont des expressions algébriques formées du produit d'un *coefficient a* réel par une puissance d'une *indéterminée* $\mathbf{X}$: $a\mathbf{X}^n$.

Exemples de monômes : $4\mathbf{X}^0 = 4$, $-3\mathbf{X}^1 = -3\mathbf{X}$, $\pi\mathbf{X}^2$, $12,5\mathbf{X}^7$ et $0\mathbf{X} = 0$

L'exposant de $\mathbf{X}$ est appelé le *degré* du monôme. Par exemple : $-3\mathbf{X}$ est de degré 1 , $\pi\mathbf{X}^2$, est de degré 2 , $12,5\mathbf{X}^7$ est de degré 7 , 4 est de degré 0 et $0\mathbf{X} = 0$ est de degré $-\infty$.

Un *polynôme* est une somme (finie) de monômes.

Exemples.

$-3 + 8\mathbf{X}^2 + 4\mathbf{X} - 7\mathbf{X}^3 - 7\mathbf{X} + 10$ est un polynôme.

On dit qu'un polynôme est *réduit* lorsque tout ses monômes sont de degrés distincts. Ainsi $3\mathbf{X}^2 - 12\mathbf{X}^5 + 2$ est sous forme réduite mais $5 + 7\mathbf{X} - 14\mathbf{X}^2 + 8\mathbf{X}$ n'est pas sous forme réduite car les monômes $7\mathbf{X}$ et $8\mathbf{X}$ sont semblables (même degré).

Exercice 1. C

Donnez la forme réduite des polynômes suivants :

1. $-3\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 4\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2$
2. $7\mathbf{X}^{25} - 8\mathbf{X} + 3 + \mathbf{X} - 7\mathbf{X} + 12$
3. $3\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4\mathbf{X} + 12$

Correction de l'exercice 1

1. $-3\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 4\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2 = -3\mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2$
2. $7\mathbf{X}^{25} - 8\mathbf{X} + 3 + \mathbf{X} - 7\mathbf{X} + 12 = 7\mathbf{X}^{25} - 14\mathbf{X} + 15$
3. $3\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4\mathbf{X} + 12 = 3\mathbf{X}^2 + 6\mathbf{X} + 12$

Le degré d'un polynôme réduit est le plus grand degré de ses monômes.

Un polynôme réduit est dit *ordonné* lorsque ses monômes sont rangés suivant les puissances décroissantes de l'indéterminée $\mathbf{X}$. Par exemple $-7\mathbf{X}^3 + \mathbf{X} - 3$ est ordonné alors que $\mathbf{X} - 7\mathbf{X}^2 + 2$ ne l'est pas.

Exercice 2. C

Donnez la forme ordonnée et réduite des polynômes suivants :

1. $4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 14 + 3\mathbf{X}$
2. $23 + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2$
3. $3\mathbf{X} + 4\mathbf{X}^2 + 9\mathbf{X} + 9$

Correction de l'exercice 2

1. $4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 14 + 3\mathbf{X} = 4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 10\mathbf{X} - 14$
2. $23 + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} + 23$
3. $3\mathbf{X} + 4\mathbf{X}^2 + 9\mathbf{X} + 9 = 4\mathbf{X}^2 + 12\mathbf{X} + 9$

Les polynômes ont ceci de merveilleux qu'ils peuvent s'appliquer à un très grand nombre d'objets $\mathbf{X}$ peut désigner des nombres bien sûr mais aussi d'autres polynômes, des fonctions, des transformations géométriques, des tableaux de nombres (matrices), etc.

Exemples.

1. $x^2 - x + 3$ est une expression polynomiale sous forme développée, réduite et ordonnée
2. $-x + 3 + x^2$ est une expression polynomiale mais elle n'est pas ordonnée.
3. $x^2 - 2x + x + 5 - 2$ est une expression polynomiale mais elle n'est pas réduite.
4. $x^3(x + 1)$ est une expression polynomiale.
5. $\frac{3x^3}{x+1}$ n'est pas une expression polynomiale mais les numérateurs et dénominateurs en sont.
6. $\sqrt{x^2 + 1} + 2x + 7$ n'est pas une expression polynomiale.
7. L'expression algébrique d'une fonction affine est une fonction polynomiale.

II Développer.

Dans la suite les indéterminées, $\mathbf{X}$, seront notées comme des variables (x).

1 Développer, réduire et ordonner.

$x^2(3x - 1)$ n'est, a priori, pas un polynôme puisque ce n'est pas une somme de monômes. Cependant en distribuant x^2 :

$$\begin{aligned} x^2(3x - 1) &= x^2 3x - x^2 1 \\ &= x^2 3x^1 - x^2 \\ &= 3x^{2+1} - x^2 \\ &= 3x^3 - x^2 \end{aligned}$$

Ainsi $x^2(3x - 1) = 3x^3 - x^2$ est bien un polynôme de degré 3.

Afin d'identifier chaque polynôme la convention est de l'écrire sous forme développée, réduite et ordonnée.

Définition 1

Deux polynômes sont dits *égaux* lorsqu'ils ont la même expression développée, réduite et ordonnée.

2 La boîte à outil pour développer.

Proposition 1

Les lettres a, b, c, d désignent des nombres, des expressions algébriques, des fonctions numériques etc.

(i) *Distributivité* de la multiplication sur l'addition : $a(b+c) = ab + ac$

(ii) Double distributivité : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

(iii) *Identités remarquables* :

. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Démonstration

(i) La distributivité n'est pas démontrable. C'est un axiome de la construction de la multiplication de l'ensemble des nombres réels.

(ii) On applique en deux temps la propriété de distributivité.

(iii) Les égalités se démontrent en partant du membre de gauche vers faisant :

. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ puis on utilise la double distributivité.

. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ puis on utilise la double distributivité.

. En utilisant la double distributivité.

■

III Exercice.

Exercice 3.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions suivantes.

a) $A(x) = 4x(x+3)$.

b) $B(x) = (3+x)(2x-1)$.

c) $C(x) = (x+3)^2$.

d) $D(x) = (2x-4)^2$.

e) $E(x) = (-x+5)(-x-5)$.

Correction de l'exercice 3

a) En utilisant la distributivité :

$$\begin{aligned} A(x) &= 4x \times x + 4x \times 3 \\ &= 4x^2 + 12x \end{aligned}$$

En utilisant la double distributivité :

$$\begin{aligned} B(x) &= (3+x)(2x+(-1)) \\ &= 3 \times 2x + 3 \times (-1) + x \times 2x + x \times (-1) \\ &= 6x - 3 + 2x^2 - x \\ &= 2x^2 + 6x - x - 3 \\ &= 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

b) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Avec $a = x$ et $b = 3$.

$$\begin{aligned} C(x) &= x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

c) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Avec $a = 2x$ et $b = 4$.

$$\begin{aligned} D(x) &= (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 4 + 4^2 \\ &= 2^2x^2 - 16x + 16 \\ &= 4x^2 - 16x + 16 \end{aligned}$$

d) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Avec $a = -x$ et $b = 5$.

$$\begin{aligned} E(x) &= (-x)^2 - 5^2 \\ &= x^2 - 15 \end{aligned}$$

Exercice 4.

Développez, réduisez puis ordonnez les expressions suivantes :

1. $A(x) = (x-1)(x-2)$
2. $B(x) = (11x-12)^2$
3. $C(x) = (x+5)^2$
4. $D(x) = (x-5)^2$
5. $E(x) = (x+5)(x-5)$
6. $F(x) = (2x-7)^2$
7. $G(x) = (3+2x)^2$
8. $H(x) = (11-x)(11+x)$
9. $I(x) = \left(3x + \frac{5}{6}\right)^2$
10. $J(x) = \left(7x - \frac{1}{3}\right)^2$
11. $K(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)$
12. $L(x) = (5-11x)^2$
13. $M(x) = (12+13x)^2$
14. $N(x) = (9x-4)(4+9x)$
15. $O(x) = \left(10x + \frac{1}{3}\right)^2$
16. $P(x) = (-x+1,2)^2$
17. $Q(x) = (0,7-x)(0,7+x)$
18. $R(x) = (x-2)(x^2+3)-(x+2)x^2$

Correction de l'exercice 4

1. $x^2 - 3x + 2$.
2. .
3. $x^2 + 10x + 25$
4. $x^2 - 25$.
5. $4x^2 - 28x + 49$
6. $4x^2 + 12x + 9$.
7. $-x^2 - 121$.
8. $9x^2 + 5x + \frac{25}{36}$.
9. $49x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{1}{9}$.
10. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{25}{36}$.
11. $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 - x^3 - 2x^2 = -4x^2 + 3x - 6$

Exercice 5.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

1. $A(X) = (3X + 4)(X - 5)$,
2. $B(X) = 12(X - 3) - 14(X + 4)$,
3. $C(X) = 11(X - 9) - 7(X - 1)$,
4. $D(X) = 28X(3X^2 - 4X + 12)$,
5. $E(X) = 3,2X^2(5X^2 - 12X - 1,1)$,
6. $F(X) = -2X(3X - X + 2)$,
7. $G(X) = 5X(X - 3)$,
8. $H(X) = 3X^2(2X^2 - X + 4)$,
9. $K(X) = (X + 3)(X + 4)$,
10. $L(X) = (2X + 1)(X + 2)$,
11. $M(X) = (3X - 2)(2X + 3)$,
12. $N(X) = (X - 5)(X - 2)$,
13. $P(X) = (2X - 1)(4X + 3)$,
14. $Q(X) = (2X - 7)^2$,
15. $R(X) = (5X - 2)(X + 4)$,
16. $S(X) = (3X + 1,5)(2X - 3)$,
17. $T(X) = (5X - 7)(0,5X - 1,2)$,
18. $U(X) = (2X - 1,1)(X + 4)$,
19. $V(X) = (X - 7)(X + 7)$.

Correction de l'exercice 5

1. $P_1(X) = 3X^2 - X - 20$
2. $P_2(X) = -2X - 92$
3. $P_3(X) = 4X - 92$
4. $P_4(X) = 54X^3 - 112X^2 + 336X$
5. $P_5(X) = 16X^4 - 38,4X^3 - 3,52X^2$
6. $P_7(X) = -4X^2 - 4X$
7. $P_8(X) = 5X^2 - 3X$
8. $P_9(X) = 6X^4 - 3X^3 + 12X^2$
9. $P_{10}(X) = X^2 + 7X + 12$
10. $P_{11}(X) = 2X^2 + 5X + 2$
11. $P_{12}(X) = 6X^2 + 5X - 6$
12. $P_{13}(X) = X^2 - 7X + 10$

Exercice 6.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

1. $A(x) = (2X-3)^2$,
2. $B(X) = \left[(2X^2-2X+3)-(2X^2+3)\right](5X^2-4X+3)$,
3. $C(X) = (3X-1)(5X-2)+(X+2)^2$,
4. $D(X) = (5X-3)(3X+1)-(2X-4)(-X+5)$,
5. $E(X) = (1,5X-5)(1,5X+5)-(X-1)^2$,
6. $F(X) = (5X+2)^2-(X-3)^2$,
7. $G(X) = (3X-2)^2-(5-4X)(4-6X)$,
8. $H(X) = (X-1)(2X+3)+(X-1)(X+2)$,
9. $I(X) = (2X-5)(2X+5)$,
10. $J(X) = (3X+1)(7X-2)+(X-2)^2$,
11. $K(X) = (4X-3)(3X+2)-(2X+5)(X-3)$,
12. $L(X) = (1,5X-2)(1,5X+2)-(X+3)^2$,
13. $M(X) = (3X-2)^2-(X-4)^2$,
14. $N(X) = (3X+1)^2-(5-4X)(2+3X)$,
15. $P(X) = (X-1)(2X+2)+(X-1)(2X+2)$,
16. $Q(X) = (X+1)(X-3)+(X+1)(3X+1)$,
17. $R(X) = (2X-4)(X-1)-(X-2)(3X+2)$,
18. $S(X) = (X-3)(X+2)-(X-2)(2X+1)$,
19. $T(X) = (X+1)(X-4)-(2X+8)(X+5)$,
20. $U(X) = (3X-2)^2-(5X-4)(2+3X)$,
21. $V(X) = (X+2)(2X-3)+(X-1)(X+2)$.

Exercice 7.

Démontrez les égalités proposées, valables pour tout x réel.

1. $(-2x+8)(x-7) = -2x^2+22x-56$,
2. $-9+6x+3x^2 = -3(1-x)(x+3)$,
3. $-3(x-3)^2+3 = -3(x-4)(x-2)$.

Correction de l'exercice 7

♡

Exercice 8. C

Vérifiez que les trois formes proposées, A, B et C, correspondent à une même expression polynomiale.

1. $A(x) = (x - 3)(x + 5)$.
   $B(x) = x^2 + 2x - 15$.
   $C(x) = (x + 1)^2 - 16$.
2. $A(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 6$.
   $B(x) = (x - 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.
   $C(x) = (x - \sqrt{2})^2 - 8$
3. $A(x) = 2x^2 + 3x - 2$.
   $B(x) = (2x - 1)(x + 2)$.
   $C(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$.

Exercice 9. E

Est-il possible que $x^2 - 3x + 4$ s'écrive pour tout x réel comme un produit de la forme $(x + 1)(ax + b)$ avec a et b réels ?

Correction de l'exercice 9

Nous allons faire une démonstration par analyse-synthèse.

Notons $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Analyse.

Supposons que $f(x) = (x + 1)(ax + b)$.

Comme

$$(x + 1)(ax + b) = ax^2 + (a + b)x + b,$$

et donc

$$ax^2 + (a + b)x + ab = x^2 - 3x + 4.$$

L'écriture sous forme développée, réduite et ordonnée étant unique, nous identifions les coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -3 \\ b = 4 \end{cases}$$

Et donc : $a = 1$, $b = -4$ et $b = 4$.

Synthèse.

Les seules solutions possibles doivent vérifier à la fois $ab = 1 \times (-4) = -4$ mais aussi $b = 4$ ce qui est impossible donc il n'y a pas de solution au problème.

Il n'est donc pas possible de trouver une écriture de $x^2 - 3x + 4$ de la forme $(x + 1)(ax + b)$.

Démonstration plus brève. Raisonnement par l'absurde.

Raisonnons par l'absurde en supposant que nous avons trouvé des nombres a et b tels que pour tout x réel $x^2 - 3x + 4 = (x + 1)(ax + b)$.

Alors en particulier, pour $x = -1$, $8 = 0$, ce qui est impossible.

Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il n'est pas possible de trouver a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x + 4 = (x+1)(ax+b)$.

Exercice 10. E

À la calculatrice, une instruction $x \wedge 3$ compte pour 2 multiplications : $x \wedge 3 = x \times x \times x$.

1. **Premier exemple.**
   Soit $f(x) = x^2 + 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$ (forme A).
   (a) Vérifiez que $f(x) = 3 + x(x+4)$ pour tout x réel (forme H).
   (b) Combien d'opérations sont effectuées avec la forme A ? avec la forme H ?
   (c) On programme le calcul de $f(x)$ pour x variant de 0 à 2 avec un pas de $0,1$. Combien d'opérations sont nécessaires avec chacune des deux formes ?
2. **Deuxième exemple.**
   Reprendre les questions a, b et c de la question 1 pour $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ (forme A) et $f(x) = -1 + x(4 + x(-3 + x(2+x)))$ (forme H).
3. **Troisième exemple.**
   Soit $f(x) = 4x^7 + 2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.
   (a) Proposer la forme H associée.
   (b) Reprendre les questions 1(b) et 1(c).
4. Quel est le gain obtenu en nombre d'opérations pour $f(x) = x^{50} + x^{49} + x^{48} + \cdots + x^2 + x + 1$?
   On pourra programmer un algorithme pour effectuer un calcul de ce gain.

Correction de l'exercice 10

Cette méthode qui permet d'économiser les calculs et donc d'accélérer les programme informatiques est appelé l'*algorithme de Hörner*.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3 + x(x+4) &= 3 + x \times x + x \times 4 \\ &= 3 + x^2 + 4x \\ &= x^2 + 4x + 3 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

(b) Avec la forme A : $x \times x + 4 \times x + 3$. Il y a donc 4 opérations.
Avec la forme H : $3 + x \times (x + 4)$. Il y 3 opérations.

(c) Il faut faire les calculs pour 0, 0,1, 0,2, ..., 2. Il faut donc calculer 21 images par f.
Avec la forme H il faudra donc faire 21 fois 4 opérations, c'est-à-dire 81 opérations.
Avec la forme A il faudra donc faire 21 fois 3 opérations, c'est-à-dire 63 opérations.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
-1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x))) &= -1 + x(4 + x(-3 + x \times 2 + x \times x))) \\
&= -1 + x(4 + x(x^2 + 2x - 3)) \\
&= -1 + x(4 + x \times x^2 + x \times 2x - x \times 3) \\
&= -1 + x(x^3 + 2x^2 - 3x + 4) \\
&= -1 + x \times x^3 + x \times 2x^2 - x \times 3x + x \times 4) \\
&= x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

(b) Forme A : 13 opérations.
Forme H : 7 opérations.

(c) Forme A : 273 opérations.
Forme H : 147 opérations.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4x^7 + 2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 \\
&= -1 + 4x - 3x^2 + 2x^3 - 4x^4 + 3x^5 + 2x^6 + 4x^7 \\
&= -1 + x(4 - 3x + 2x^2 - 4x^4 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6) \\
&= -1 + x(4 + x(-3 + 2x - 4x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 4x^5)) \\
&= -1 + x(4 + x(-3 + x(2 - 4x + 3x^2 + 2x^3 + 4x^4))) \\
&= -1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x(-4 + 3x + 2x^2 + 4x^3)))) \\
&= -1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x(-4 + x(3 + 2x + 4x^2))))) \\
&= -1 + x(4 + x(-3 + x(2 + x(-4 + x(3 + x(2 + 4x))))))
\end{aligned}$$

(b) Forme A : 35 opérations.
Forme H : 14 opérations.

(c) Forme A : 735 opérations.
Forme H : 294 opérations.

4.

$1+x$	1
$1+x+x\times x$	3
$1+x+x\times x+x\times x\times x$	6
$1+x+x\times x+x\times x\times x+x\times x\times x\times x$	10

De proche en proche on obtient : $1+2+3+4$.

Il faut donc calculer $S = 1+2+\cdots+50$.

Nous utilisons l'astuce usuelle pour la somme des entiers naturels. Nous écrivons deux fois la somme et nous additionnons terme à terme

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & +2 & +3 & +\dots & +48 & +49 & +50 \\ 50 & +49 & +48 & +\dots & +3 & +2 & +1 \\ \hline 51 & +51 & +51 & +\dots & +51 & +51 & +51 \end{array}$$

Ainsi $2S = 50\times 51$. Enfin : $S = \frac{50\times 51}{2} = 1275$.

Exercice 11. E

Soit x un nombre réel différent de 1, démontrez que

$$x^4+x^3+x^2+x+1 = \frac{1-x^5}{1-x}.$$

Correction de l'exercice 11

Il est possible d'utiliser le produit en croix.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Démontrer :

$$x^4+x^3+x^2+x+1 = \frac{1-x^5}{1-x}$$

équivaut à démontrer :

$$\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)(1-x) = \frac{1-x^5}{1-x}(1-x)$$

Or :

$$\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)(1-x)$$
$$= 1\times x^4 + 1\times x^3 + 1\times x^2 + 1\times x + 1\times 1 - x\times x^4 + x\times x^3 - x\times x^2 - x\times x - x\times 1$$
$$= 1-x^5$$