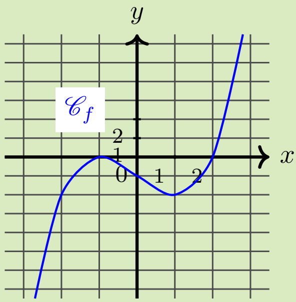
06 Courbes représentatives, fonctions de référence.

Exercice 1.

On considère ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.



Complétez le tableau de valeurs suivant.

x	-2		0		2
$f(x)$		0		-2	

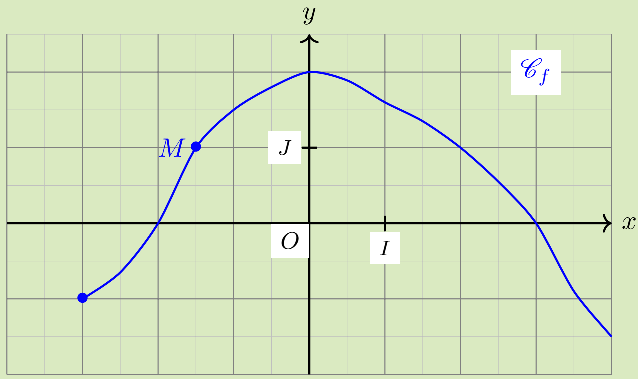
Correction de l'exercice 1

Par lecture graphique :

x	-2	-1 ou 2	0	-2 ou 1	2
$f(x)$	-2	0	-1	-2	0

Exercice 2.

Une fonction f est représentée ci-dessous dans un repère (O, I, J).



Répondez aux questions suivantes sans justification.

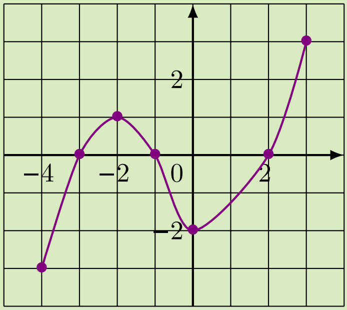
1. Donnez l'ensemble de définition de f.
2. Quel est l'image de 2 par f.
3. Quel est l'ensemble des antécédents de 0 par f ?
4. Quel est l'ensemble des antécédents de -2 par f ?
5. Quel est l'ensemble des antécédents de 2 par f ?
6. Quel est l'ensemble des antécédents de $2,5$ par f ?
7. Si x appartient à $[-1,5;1]$ que peut-on dire de $f(x)$?
8. Quel est l'abscisse de M ?
9. Quel est l'ordonnée de M ?

Correction de l'exercice 2

Par convention : sur une courbe représentative dessinée (contrairement à ce que montre la calculatrice) toute l'information est visible. Un point signifie que la courbe s'arrête à cet endroit. Si la courbe continue jusqu'au bord c'est que la courbe continue indéfiniment de la même façon.

Exercice 3.

On considère une fonction f définie sur $[-4;3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



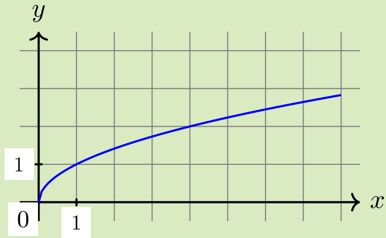
1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quels sont le (ou les) antécédent(s) de 0 par f ?
3. Combien d'antécédent(s) possède 2 ?
4. Quel est le nombre d'antécédent(s) de 1 ?
5. Donner un nombre réel m qui n'a qu'un unique antécédent par f.
6. Donner le nombre d'antécédent(s) de t par f, suivant les valeurs de t.

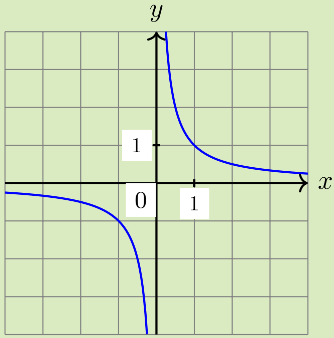
Exercice 4.

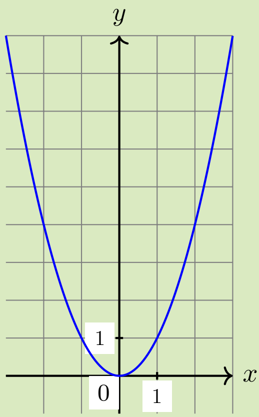
Associez, sans aucune justification, chaque fonction à sa courbe représentative.

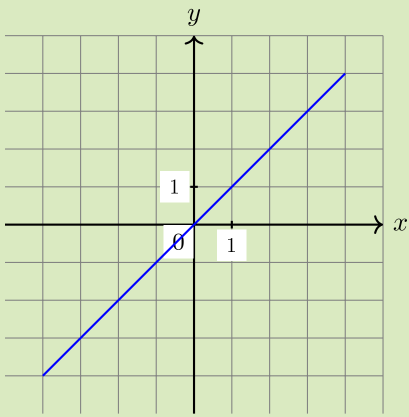
$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $\quad f_2 : x \mapsto x$,

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$, $\quad f_4 : x \mapsto x^2$.



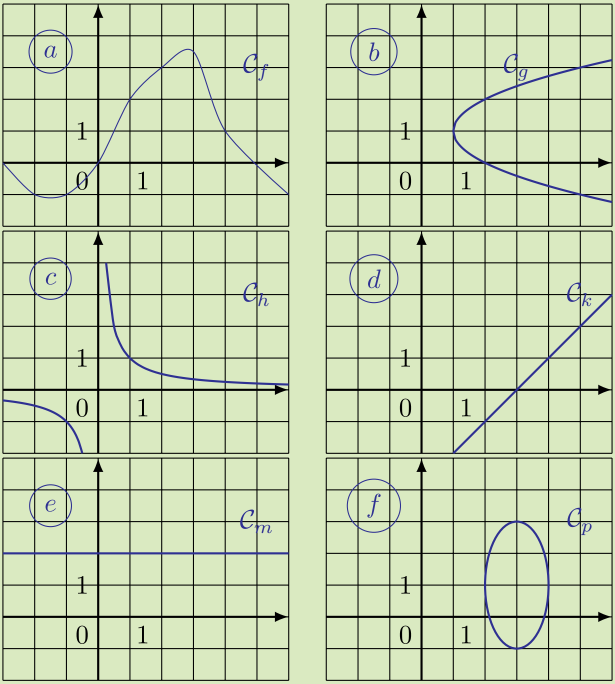






Exercice 5.

Parmi les graphiques proposés, lesquels correspondent à la représentation graphique d'une fonction ?



Exercice 6.

Exercice 31 page 55 du manuel lelivrescolaire.fr.

Correction de l'exercice 6

Seules les courbes 1, 2 et 5 sont des courbes représentatives de fonctions. Les autres ne respectent l'unicité de l'image associée à une valeur de départ.

Exercice 7.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = 2x^2 - 4x - 1$ (*i.e.* la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 4x - 1$), où x est un réel de l'intervalle $[-2; 2]$.

1. (a) Les points $A(0; 2)$ et $B(-1; 7)$ appartiennent-ils à $\mathscr{C}$?
   (b) Calculez l'ordonnée du point D de $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est 2.
2. (a) Construisez un tableau de valeur de y pour x variant de -2 à 2 avec un pas de 1.
   (b) Tracez $\mathscr{C}$ dans un repère.

Correction de l'exercice 7

Les fonctions sont des outils assez récents mais la géométrie repérée s'intéressait aux courbe depuis longtemps. Ce sont les équations (égalités liant abscisses et ordonnées) qui étaient privilégiées. Vous pouvez comprendre $y = 4x^2 - 2x - 1$ comme $f : x \mapsto 4x^2 - 2x - 1$

1. Le point A est un point de la courbe représentative de f, autrement dit $A \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $A(x_A; f(x_A))$. Autrement dit si $f(x_A) = y_A$.

   *

$$\begin{aligned} f(x_A) &= f(0) \\ &= 2 \times 0^2 - 4 \times 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

   Comme $f(x_A) \neq y_A$

$$\boxed{A \notin \mathscr{C}_f.}$$

   * De même

$$\begin{aligned} f(x_B) &= f(-1) \\ &= 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

   puisque $f(x_B) \neq y_B$

$$\boxed{B \notin \mathscr{C}_f.}$$

2. Puisque $D \in \mathscr{C}_f$:

$$y_D = f(x_D)$$

   Or, d'après l'énoncé, $x_D = 2$ donc

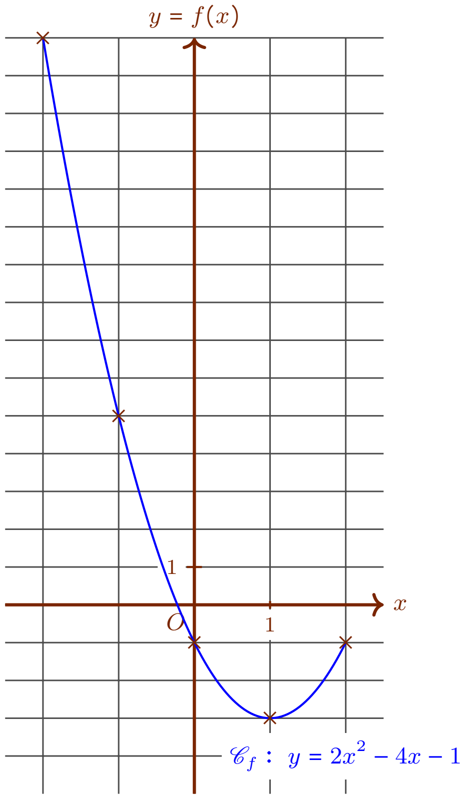
$$\begin{aligned} y_D &= f(2) \\ &= 2 \times 2^2 - 4 \times 2 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{D(2; -1).}$$

3. (a) D'après la calculatrice :

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	15	5	-1	-3	-1

(b)



Exercice 8.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f : x \mapsto 2x^2 + 6$.

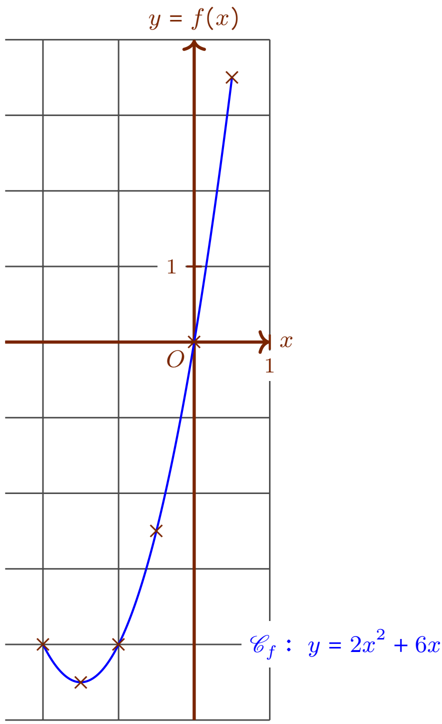
1. Donnez sans justification le tableau de valeurs de f pour x variant de -2 à $0,5$ avec un pas de $0,5$.
2. Tracez $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.
3. Le point $M(0,4; 2,72)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?
4. Quelle est l'ordonnée du point K de $\mathscr{C}$ d'abscisse $0,3$?
5. Déterminez algébriquement l'abscisse de chacun des deux points de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 8.

Correction de l'exercice 8

1. Tableau de valeurs de y (alias f).

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$
$y=f(x)$	-4	$-4,5$	-4	$-2,5$	0	$3,5$

2. (a)



3. $f(0,4)=2\times 0,4^2+6\times 0,4=2,72.$

$$\boxed{M\in\mathscr{C}_f.}$$

4. (a) $f(0,3)=1,98$. Donc

$$\boxed{K(0,3;1,98).}$$

(b) Si un point N est sur la courbe $\mathscr{C}_f$ alors ses coordonnées sont de la forme $(x;f(x))$.
Donc dire que l'ordonnée de N vaut 0 signifie que $f(x)=0$. Nous cherchons x tel que

$$f(x)=0$$

Ce qui équivaut succcessivement à :

$$2x^2 + 6x = 0$$

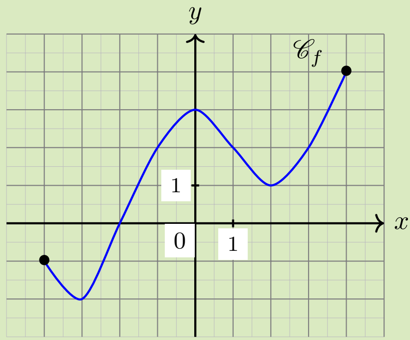
Il s'agit d'une équation qui n'est pas linéaire nous essayons de nous ramener à une équation produit-nul.

$$\begin{aligned}
2x \times x + 6 \times x &= 0 \\
(2x + 6) \times x &= 0 \\
2x + 6 = 0 \quad &\text{ou} \quad x = 0 \\
2x + 6 - 6 = 0 - 6 \quad &\text{ou} \quad x = 0 \\
2x = - \quad &\text{ou} \quad x = 0 \\
\frac{2x}{2} = \frac{-6}{2} \quad &\text{ou} \quad x = 0 \\
x = -3 \quad &\text{ou} \quad x = 0
\end{aligned}$$

Les points d'ordonnées 0 de $\mathscr{C}_f$ ont pour coordonnées $(-3; 0)$ et $(0; 0)$.

Exercice 9.

Une fonction numérique f est représentée ci-après.



Dans cet exercice nous adopterons la notation suivante : $f([0;1])$ désignera l'ensemble de toutes les images des nombre compris entre 0 et 1, $f^{-1}([0;1])$ désignera l'ensemble de tous les antécédents des nombres compris entre 0 et 1.

1. Déterminez $f([0;1])$.
2. Déterminez $f([1;3])$.
3. Déterminez $f^{-1}([0;1])$.
4. Déterminez $f^{-1}([-2;2])$.

Exercice 10.

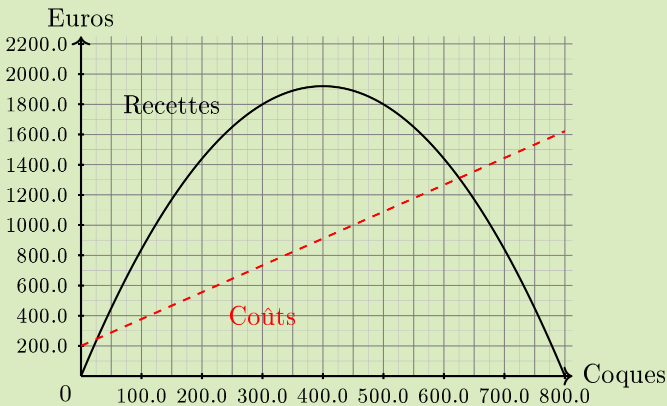
Soient $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Donnez l'ensemble de définition de f.
2. Donnez l'ensemble de définition de g.
3. Déduisez des deux questions précédentes l'ensemble de définition de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

Exercice 11.

Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles.

Sur le graphique donné ci-dessous sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de coques fabriquées exprimé en centaines d'unités.
Les ateliers permettent la fabrication de 0 à 800 coques.
Les recettes et les coûts sont exprimés euros.



Les réponses aux questions suivantes sont à justifier par lecture graphique avec, éventuellement, des tracés sur le graphique.

1. Étude du coût.
   (a) Quel est le coût de production de 125 coques ?
   (b) Pour quelle quantité de coques fabriquées le coût est-il de 1 000 euros ?
2. Étude de la recette.
   (a) Quelle est la recette occasionnée par la vente de 500 coques ?
   (b) Pour quel nombre de coques fabriquées la recette est-elle de 1 300 euros ? de 2 000 euros ?
3. Étude du bénéfice.
   (a) Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût.
   Quel est le bénéfice pour une production de 450 coques ?
   (b) Lorsque le bénéfice est positif on dit que l'entreprise est bénéficiaire.
   Dans quels cas l'entreprise est-elle bénéficiaire ?

Exercice 12.

Exercice 35 page 56 du manuel lelivrescolaire.fr.

Correction de l'exercice 12

1. * $\mathscr{D}_1 = [0;10,5]$. $f(0) = 0$ et $f(10,5) = 30$.
   * $\mathscr{D}_2 = [0;7,3]$. $f(0) = 0$ et $f(7,3) = 30$.
   * $\mathscr{D}_3 = [0;9,7]$. $f(0) = 0$ et $f(9,7) = 30$.

   Les verres n'ont pas tous la même hauteur mais ils sont tous vides au début et leur contenance totale est la même.
2. $V_1(5,5) = 16$, $V_2(3,65) = 3,5$, $V_3(4,85) = 7$.
   $V_1^{-1}(\{15\}) = \{5,3\}$, $V_2^{-1}(\{15\}) = \{5,8\}$, $V_3^{-1}(\{15\}) = \{7\}$.
3. $(6;17)$: pour une hauteur de 6 les verres 1 et 2 contiennent tout deux 17.
   $(4;4,9)$: pour une hauteur de 4 les verres 1 et 3 contiennent tout deux $4,9$.
   $(9;26)$: pour une hauteur de 9 les verres 1 et 3 contiennent tout deux 26.
   $(0;0)$: pour une hauteur nulle les verres ne contiennent pas de liquide.
4. C'est impossible car il n'y a pas de points qui soit un point d'intersection pour les trois courbes simultanément hormis l'origine du repère qui correspond à des verres vides.

Exercice 13.

Exercice 41 page 57 du manuel lelivrescolaire.fr.

Correction de l'exercice 13

1. $P(h) = 1$ si et seulement si $h = \frac{4}{3}$.
   $V_B = \frac{4}{3} \times V_{C(1)}$.
2. Il faut que $h = 2$ et dans ce cas :

$$h(2) = \frac{2}{3}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{V_B}{V_{C(2)}} &= \frac{2}{3} \\ \frac{V_B}{V_{C(2)}} \times V_{C(2)} &= \frac{2}{3} \times V_{C(2)} \\ V_B &= \frac{2}{3} V_{C(2)} \end{aligned}$$