06 Courbes représentatives, fonctions de référence.

I Équations de courbes.

Les courbes (les lignes) sont des ensembles infinis de points. Une façon de décrire une courbe consiste à donner une relation qui lie abscisse et ordonnée de chacun des points de la courbe, une équation liant l'abscisse x et l'ordonnée y de chaque point de la courbe.

Ainsi : $x^2 + y^2 = 16$ ou $2x - y + 1 = 0$ ou $y = x^2$.

Nous nous intéresserons aux courbes dont l'équation est de la forme $y = f(x)$ qui sont les courbe associées à des fonctions.

II Définition de la fonction.

Une fonction f indique des liens entre des nombres. Par exemple pour indiquer que f relie le nombre 2 au nombre 3 nous écrirons :

$$f(2) = 3.$$

Nous dirons alors que 2 est *un antécédent* de 3 par f.

Nous dirons aussi que 3 est *l'image* de 2 par f.

Définition 1

Soit $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres.

On définit une *fonction f sur $\mathscr{D}$* en associant à chaque nombre x appartenant à $\mathscr{D}$ un seul nombre y, noté $f(x)$.

Nous dirons que f est une fonction de la *variable* x.

La *courbe représentative de f*, que nous noterons souvent $\mathscr{C}_f$ est l'objet géométrique formé de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans $\mathscr{D}$.

$\mathscr{D}$ est *l'ensemble* (ou *domaine*) *de définition* de f.
$\mathscr{D}$ est l'ensemble des nombres auxquels un nombre est associé par f. On dit que f est définie sur $\mathscr{D}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y \end{array} \right.$$

Cette présentation se lit : « la fonction f, définie sur $\mathscr{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et qui à x associe y ».

x est *un antécédent* de y par f.

y est *l'image* de x par f. On le note $f(x)$ et on lit « f de x ».

Remarques.

1. La première ligne ($\mathscr{D}$ et $\mathbb{R}$) est celle des ensembles, la seconde (x et y) celle des variables.
2. La première colonne ($\mathscr{D}$ et x) correspond à l'axe des abscisses, la seconde ($\mathbb{R}$ et $y = f(x)$) à celui des ordonnées.
3. Le préfixe « anté- » signifie avant (latin).
4. « un » antécédent car il peut y en avoir plusieurs.
5. « l' »image car (par construction) il ne peut y en avoir qu'une.

Exemples.

1. Fonction définie par un diagramme sagittal.
2. Fonction définie par une situation géométrique : l'aire d'un rectangle en fonction de la longueur d'un côté.
3. La fonction qui a un nombre de points associe le nombre d'arêtes du graphe.

III Représenter des liens par une formule de calcul ou un procédé implicite.

Très souvent les liens entre les nombres seront représentés par des calculs. Par exemple nous écrirons

$$f : x \mapsto 2x - 1,$$

et nous lirons « la fonction f qui à x associe $2x - 1$ », pour indiquer qu'à chaque nombre x choisi nous associerons le résultat du calcul $2x - 1$.

Ce lien que vous avez déjà rencontré au collège défini une fonction affine.

Exemples.

1. Les fonctions affines. $f : x \mapsto ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Les fonctions linéaires. $f : x \mapsto ax$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
3. Les fonctions constantes. $f : x \mapsto b$ où $b \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$..
4. La fonction carré. $x \mapsto x^2$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
5. La fonction cube. $fx \mapsto x^3$ et $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
6. La fonction inverse. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $\mathscr{D}_f =]-\infty.0[\cup]0;+\infty[= \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{O\}$.
7. La fonction racine carrée. $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $\mathscr{D}_f = [0;+\infty[= \mathbb{R}_+$.

Remarques.

1. Si, pour les modélisations en sciences expérimentales (physique, chimie, biologie, géologie, économie,...), les fonctions constantes et linéaires correspondent à des modélisations spécifiques, pour l'étude mathématique, elles ne sont que des cas particuliers de fonctions affines.
2. Pour la fonction racine carrée nous n'avons pas réellement une formule. Nous ne connaissons que les racines carrées des carrés parfaits (0, 1, 4, 9, 16, ...). L'utilisation du symbole $\sqrt{\ }$ n'indique pas un procédé de calcul pour obtenir ne serait-ce qu'une valeur approchée de la valeur désirée. Nous verrons des algorithmes pour obtenir des valeurs approchées. Ainsi pour obtenir une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de $\sqrt{x}$:

```
v=0
while v**2<x:
    v=v+0.01
print(v-0.01)
```

Il s'agit, hormis pour les carrés parfaits, d'un procédé de définition implicite : la racine carrée est l'antécédent positif par la fonction carrée.

IV Tableau de valeurs.

Il est possible de représenter les nombres reliés par une fonction en les plaçant en vis-à-vis dans un tableau.

Par exemple, en utilisant la fonction affine précédente, nous voyons :

$$f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3.$$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

Nous utiliserons en général la calculatrice pour obtenir le tableau.

Exemples.

1. Déterminons le tableau de valeurs de $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$ pour x allant de -1 à 2 avec un pas de $0,5$.
2. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$. Complétons le tableau de valeurs :

x	0	2	$3,5$	10^{15}
$f(x)$				

V Représentation graphique.

Définition 2

Soient :

. $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres,

. $f : \begin{cases} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ une fonction.

La *courbe représentative de f*, que nous noterons souvent $\mathscr{C}_f$ est l'objet géométrique formé de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ (dans un certain repère) lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans $\mathscr{D}$.

Remarques.

1. La courbe représentative (pas le dessin mais l'ensemble des couples $(x; f(x))$) est le point de vue retenu pour la définition générale d'une fonction.
2. Comme $f(x)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse x nous dirons aussi que $\mathscr{C}_f$ est la *courbe d'équation $y = f(x)$*.

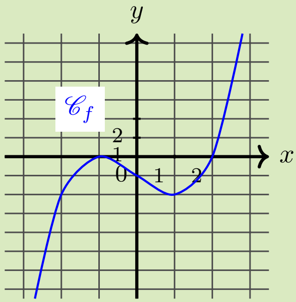
Exemples.

1. Fonction affine. La courbe est une *droite* (nous le démontrerons après avoir défini proprement les droites).
2. Fonction carré. La courbe est une *parabole*.
3. Fonction Cube.
4. Fonction Inverse. La courbe est une *hyperbole*.
5. Fonction racine carrée. La courbe est une branche de parabole.

VI Exercices.

Exercice 1.

On considère ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.



Complétez le tableau de valeurs suivant.

x	-2		0		2
$f(x)$		0		-2	

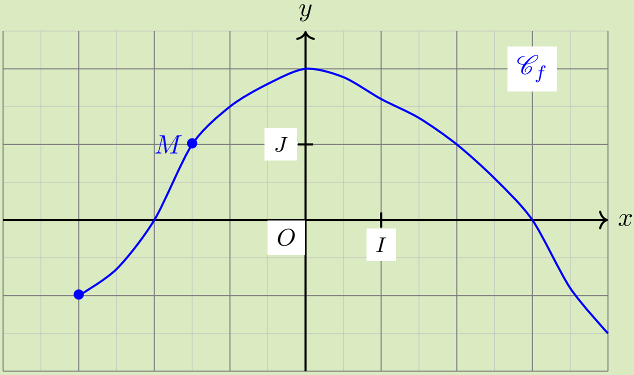
Correction de l'exercice 1

Par lecture graphique :

x	-2	-1 ou 2	0	-2 ou 1	2
$f(x)$	-2	0	-1	-2	0

Exercice 2.

Une fonction f est représentée ci-dessous dans un repère (O, I, J).



Répondez aux questions suivantes sans justification.

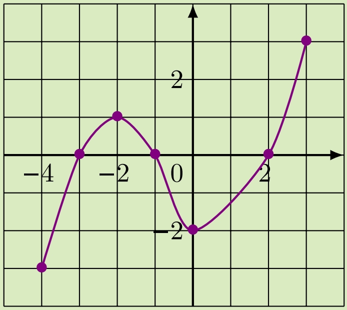
1. Donnez l'ensemble de définition de f.
2. Quel est l'image de 2 par f.
3. Quel est l'ensemble des antécédents de 0 par f ?
4. Quel est l'ensemble des antécédents de -2 par f ?
5. Quel est l'ensemble des antécédents de 2 par f ?
6. Quel est l'ensemble des antécédents de $2,5$ par f ?
7. Si x appartient à $[-1,5;1]$ que peut-on dire de $f(x)$?
8. Quel est l'abscisse de M ?
9. Quel est l'ordonnée de M ?

Correction de l'exercice 2 ♡

Par convention : sur une courbe représentative dessinée (contrairement à ce que montre la calculatrice) toute l'information est visible. Un point signifie que la courbe s'arrête à cet endroit. Si la courbe continue jusqu'au bord c'est que la courbe continue indéfiniment de la même façon.

Exercice 3.

On considère une fonction f définie sur $[-4;3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



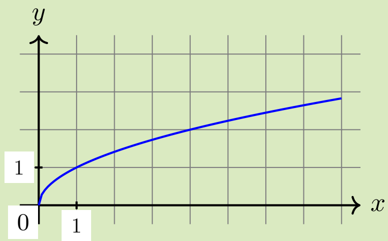
1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quels sont le (ou les) antécédent(s) de 0 par f ?
3. Combien d'antécédent(s) possède 2 ?
4. Quel est le nombre d'antécédent(s) de 1 ?
5. Donner un nombre réel m qui n'a qu'un unique antécédent par f.
6. Donner le nombre d'antécédent(s) de t par f, suivant les valeurs de t.

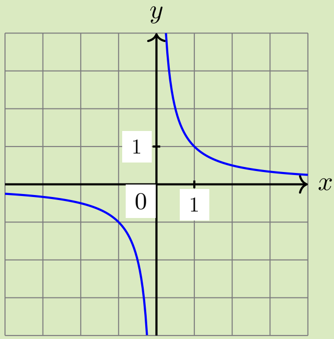
Exercice 4.

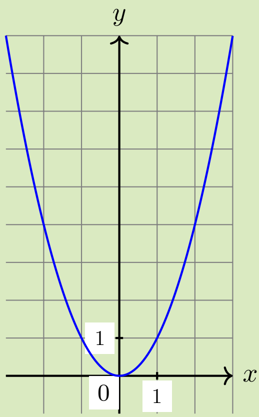
Associez, sans aucune justification, chaque fonction à sa courbe représentative.

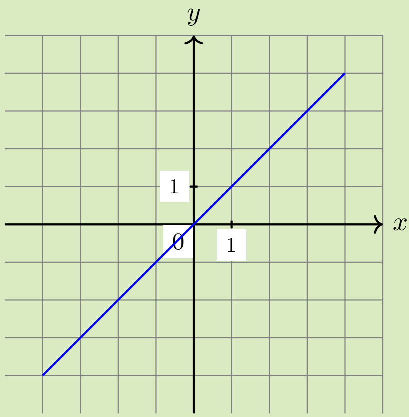
$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $f_2 : x \mapsto x$,

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$, $f_4 : x \mapsto x^2$.



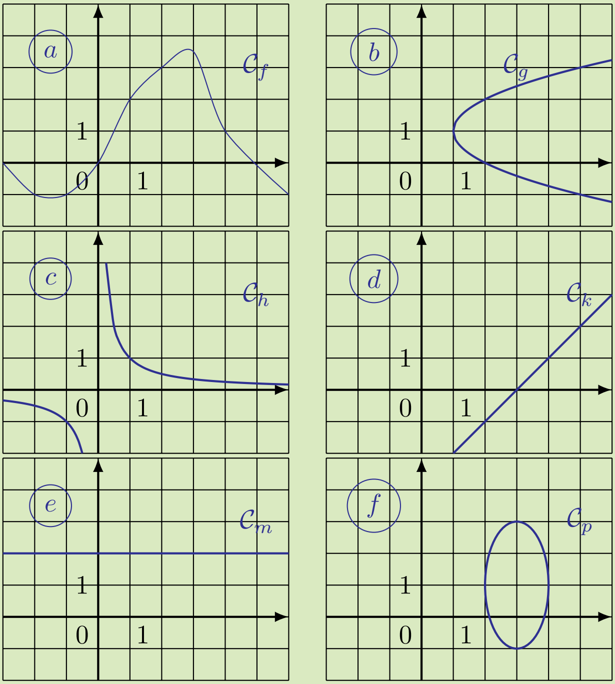






Exercice 5.

Parmi les graphiques proposés, lesquels correspondent à la représentation graphique d'une fonction ?



Exercice 6.

Exercice 31 page 55 du manuel lelivrescolaire.fr.

Correction de l'exercice 6

Seules les courbes 1, 2 et 5 sont des courbes représentatives de fonctions. Les autres ne respectent l'unicité de l'image associée à une valeur de départ.

Exercice 7.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = 2x^2 - 4x - 1$ (*i.e.* la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 4x - 1$), où x est un réel de l'intervalle $[-2; 2]$.

1. (a) Les points $A(0; 2)$ et $B(-1; 7)$ appartiennent-ils à $\mathscr{C}$?

   (b) Calculez l'ordonnée du point D de $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est 2.

2. (a) Construisez un tableau de valeur de y pour x variant de -2 à 2 avec un pas de 1.

   (b) Tracez $\mathscr{C}$ dans un repère.

Correction de l'exercice 7

Les fonctions sont des outils assez récents mais la géométrie repérée s'intéressait aux courbe depuis longtemps. Ce sont les équations (égalités liant abscisses et ordonnées) qui étaient privilégiées. Vous pouvez comprendre $y = 4x^2 - 2x - 1$ comme $f : x \mapsto 4x^2 - 2x - 1$

1. Le point A est un point de la courbe représentative de f, autrement dit $A \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $A(x_A; f(x_A))$. Autrement dit si $f(x_A) = y_A$.

   *

   $$\begin{aligned} f(x_A) &= f(0) \\ &= 2 \times 0^2 - 4 \times 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

   Comme $f(x_A) \neq y_A$

   $$\boxed{A \notin \mathscr{C}_f.}$$

   * De même

   $$\begin{aligned} f(x_B) &= f(-1) \\ &= 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

   puisque $f(x_B) \neq y_B$

   $$\boxed{B \notin \mathscr{C}_f.}$$

2. Puisque $D \in \mathscr{C}_f$:

   $$y_D = f(x_D)$$

   Or, d'après l'énoncé, $x_D = 2$ donc

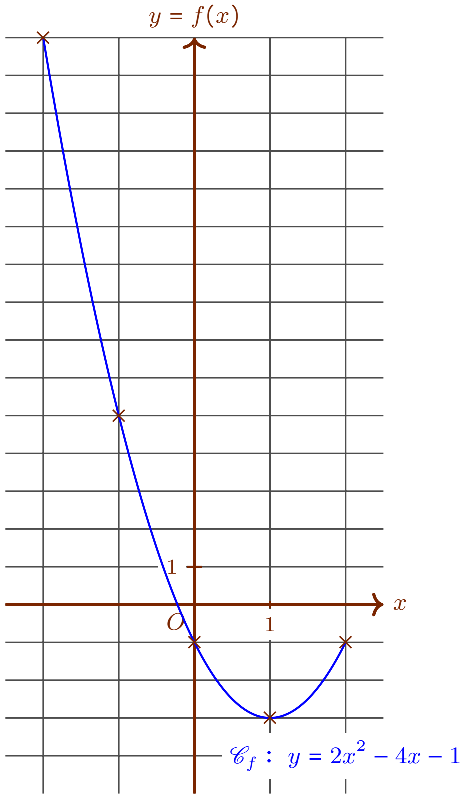
   $$\begin{aligned} y_D &= f(2) \\ &= 2 \times 2^2 - 4 \times 2 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

   $$\boxed{D(2; -1).}$$

3. (a) D'après la calculatrice :

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	15	5	-1	-3	-1

(b)



Exercice 8.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f : x \mapsto 2x^2 + 6$.

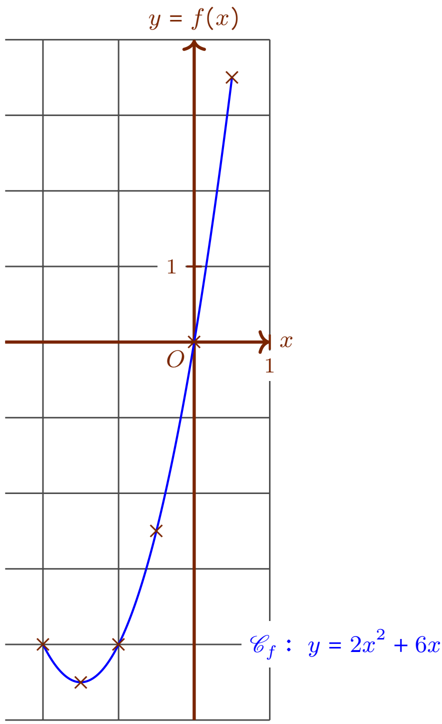
1. Donnez sans justification le tableau de valeurs de f pour x variant de -2 à $0,5$ avec un pas de $0,5$.
2. Tracez $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.
3. Le point $M(0,4; 2,72)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?
4. Quelle est l'ordonnée du point K de $\mathscr{C}$ d'abscisse $0,3$?
5. Déterminez algébriquement l'abscisse de chacun des deux points de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 8.

Correction de l'exercice 8

1. Tableau de valeurs de y (alias f).

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$
$y = f(x)$	-4	$-4,5$	-4	$-2,5$	0	$3,5$

2. (a)



3. $f(0,4) = 2 \times 0,4^2 + 6 \times 0,4 = 2,72$.

$$\boxed{M \in \mathscr{C}_f.}$$

4. (a) $f(0,3) = 1,98$. Donc

$$\boxed{K(0,3; 1,98).}$$

(b) Si un point N est sur la courbe $\mathscr{C}_f$ alors ses coordonnées sont de la forme $(x; f(x))$.
Donc dire que l'ordonnée de N vaut 0 signifie que $f(x) = 0$. Nous cherchons x tel que

$$f(x) = 0$$

Ce qui équivaut succcessivement à :

$$2x^2 + 6x = 0$$

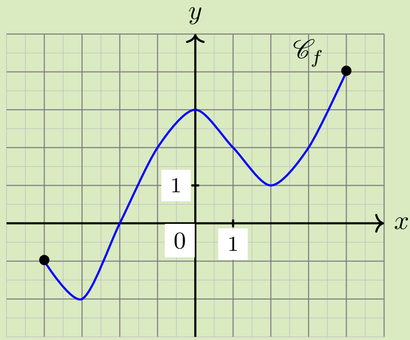
Il s'agit d'une équation qui n'est pas linéaire nous essayons de nous ramener à une équation produit-nul.

$$\begin{aligned}
2x \times x + 6 \times x &= 0 \\
(2x + 6) \times x &= 0 \\
2x + 6 = 0 \quad &\text{ou} \quad x = 0 \\
2x + 6 - 6 = 0 - 6 \quad &\text{ou} \quad x = 0 \\
2x = - \quad &\text{ou} \quad x = 0 \\
\frac{2x}{2} = \frac{-6}{2} \quad &\text{ou} \quad x = 0 \\
x = -3 \quad &\text{ou} \quad x = 0
\end{aligned}$$

Les points d'ordonnées 0 de $\mathscr{C}_f$ ont pour coordonnées $(-3; 0)$ et $(0; 0)$.

Exercice 9.

Une fonction numérique f est représentée ci-après.



Dans cet exercice nous adopterons la notation suivante : $f([0;1])$ désignera l'ensemble de toutes les images des nombre compris entre 0 et 1, $f^{-1}([0;1])$ désignera l'ensemble de tous les antécédents des nombres compris entre 0 et 1.

1. Déterminez $f([0;1])$.
2. Déterminez $f([1;3])$.
3. Déterminez $f^{-1}([0;1])$.
4. Déterminez $f^{-1}([-2;2])$.

Exercice 10.

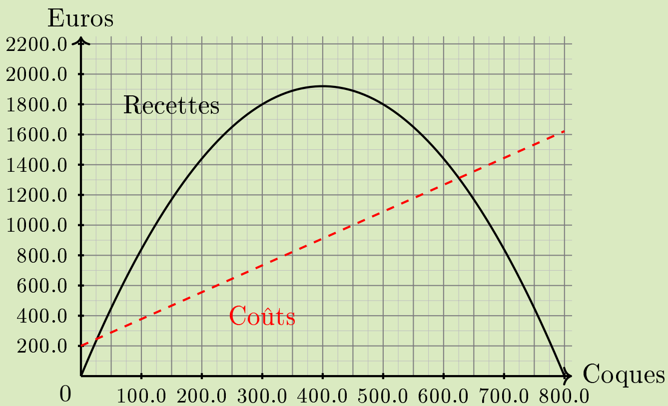
Soient $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Donnez l'ensemble de définition de f.
2. Donnez l'ensemble de définition de g.
3. Déduisez des deux questions précédentes l'ensemble de définition de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

Exercice 11.

Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles.

Sur le graphique donné ci-dessous sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de coques fabriquées exprimé en centaines d'unités.
Les ateliers permettent la fabrication de 0 à 800 coques.
Les recettes et les coûts sont exprimés euros.



Les réponses aux questions suivantes sont à justifier par lecture graphique avec, éventuellement, des tracés sur le graphique.

1. Étude du coût.
   (a) Quel est le coût de production de 125 coques ?
   (b) Pour quelle quantité de coques fabriquées le coût est-il de 1 000 euros ?
2. Étude de la recette.
   (a) Quelle est la recette occasionnée par la vente de 500 coques ?
   (b) Pour quel nombre de coques fabriquées la recette est-elle de 1 300 euros ? de 2 000 euros ?
3. Étude du bénéfice.
   (a) Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût.
   Quel est le bénéfice pour une production de 450 coques ?
   (b) Lorsque le bénéfice est positif on dit que l'entreprise est bénéficiaire.
   Dans quels cas l'entreprise est-elle bénéficiaire ?

Exercice 12.
Exercice 35 page 56 du manuel lelivrescolaire.fr.

Correction de l'exercice 12

1. * $\mathscr{D}_1 = [0;10,5]$. $f(0) = 0$ et $f(10,5) = 30$.
   * $\mathscr{D}_2 = [0;7,3]$. $f(0) = 0$ et $f(7,3) = 30$.
   * $\mathscr{D}_3 = [0;9,7]$. $f(0) = 0$ et $f(9,7) = 30$.

   Les verres n'ont pas tous la même hauteur mais ils sont tous vides au début et leur contenance totale est la même.
2. $V_1(5,5) = 16$, $V_2(3,65) = 3,5$, $V_3(4,85) = 7$.
   $V_1^{-1}(\{15\}) = \{5,3\}$, $V_2^{-1}(\{15\}) = \{5,8\}$, $V_3^{-1}(\{15\}) = \{7\}$.
3. $(6;17)$: pour une hauteur de 6 les verres 1 et 2 contiennent tout deux 17.
   $(4;4,9)$: pour une hauteur de 4 les verres 1 et 3 contiennent tout deux 4,9.
   $(9;26)$: pour une hauteur de 9 les verres 1 et 3 contiennent tout deux 26.
   $(0;0)$: pour une hauteur nulle les verres ne contiennent pas de liquide.
4. C'est impossible car il n'y a pas de points qui soit un point d'intersection pour les trois courbes simultanément hormis l'origine du repère qui correspond à des verres vides.

Exercice 13.
Exercice 41 page 57 du manuel lelivrescolaire.fr.

Correction de l'exercice 13

1. $P(h) = 1$ si et seulement si $h = \frac{4}{3}$.
   $V_B = \frac{4}{3} \times V_{C(1)}$.
2. Il faut que $h = 2$ et dans ce cas :

$$h(2) = \frac{2}{3}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{V_B}{V_{C(2)}} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{V_B}{V_{C(2)}} \times V_{C(2)} = \frac{2}{3} \times V_{C(2)}$$
$$V_B = \frac{2}{3} V_{C(2)}$$