04 Théorème de Pythagore.

I Médiane et cercle circonscrit.

1 Médiane.

2 Cercle circonscrit.

Exercice 1.

Soient ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. Tracez la médiane $[AI]$ et la hauteur $[CH]$. Démontrez que le triangle BHI est isocèle.

Exercice 2.

Deux cercles de centre O et O' se coupent en E et F. Soient R le symétrique de E par rapport à O et A le symétrique de E par rapport à O'. Montrez que les points R, F et A sont alignés.

Exercice 3.

Soient P, A et U trois points alignés. Une droite passant par A coupe le cercle de diamètre $[PA]$ en I et le cercle de diamètre $[AU]$ en T. Démontrez que $(PI) \parallel (UT)$.

II Propriété de Pythagore.

Exercice 4.

Calculez une valeur approchée au centième par excès du rayon du cercle circonscrit à un carré de côté 9 m.

Exercice 5.

Calculez le périmètre d'un losange dont les diagonales mesurent 16 cm et 3 cm.

Exercice 6.

Calculez la longueur d'un rectangle dont la largeur mesure $6,89$ m et la diagonale $14,89$ m.

Exercice 7.

ARC est un triangle rectangle en A tel que $CR = 53$ et $AC = 45$. Calculez une valeur approchée au dixième des longueurs des trois médianes du triangle.

III Distance d'un point à une droite.

Exercice 8.

Soient A, B et C trois points du plan.

1. Après avoir placé les points A, B et C dans un repère, dessinez les projetés orthogonaux, respectivement, A' de A sur (BC), B' de B sur (AC) et C' de C sur (AB).
2. Que remarquez-vous à propos des droites (AA'), (BB') et (CC') ?

Correction de l'exercice 8

1.
2. La droite (AA') est la hauteur du triangle ABC issue de A. De même pour (BB') et (CC'). Elles sont concourantes en un seul point appelés le centre de gravité du triangle.

Exercice 9.

Montrez que tout point d'une bissectrice d'un angle est équidistant aux demi-droites formant l'angle.

Correction de l'exercice 9

Avec la trigonométrie : même tangente. Si la tangente n'est pas vu la démarche est plus longue et utilise à la fois le cosinus et le sinus.

Exercice 10.

Démontrez le résultat suivant.

Soient A, B et C trois points alignés, distincts deux à deux. Si on note A', B' et C' leurs projetés orthogonaux respectifs sur une droite Δ, non perpendiculaire à la droite (AB) alors :

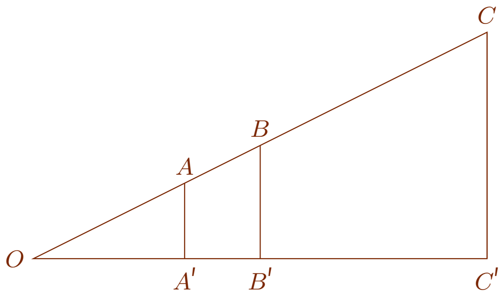
$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

Correction de l'exercice 10

* Cas non parallèles : théorème de Thalès.

Puisque Δ et (AB) ne sont pas parallèles elles sont sécantes. Notons O leur point d'intersection.

La formule à démontrer relève d'une généralisation du théorème de Thalès. Démontrons le résultat dans le cas particulier de la figure ci-dessous.



Les points O, A, B d'une part et O , A', B' d'autre part sont alignés dans cet ordre donc nous avons une configuration de Thalès.
De plus, de $(AA') \perp \Delta$ et $(BB') \perp \Delta$ nous déduisons $(AA') \parallel (BB')$.
Des deux points précédents nous déduisons, d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \quad (1).$$

Comme $OB = OA + AB$ de (1), nous déduisons

$$AB = OA \times \frac{OB'}{OA'} - OA$$

De même on démontrerai :

$$AC = OA \times \frac{OC'}{OA'} - OA$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{AB}{AC} &= \frac{OA \times \frac{OB'}{OA'} - OA}{OA \times \frac{OC'}{OA'} - OA} \\ &= \frac{OB' - OA'}{OC' - OA'} \\ &= \frac{A'B'}{A'C'}\end{aligned}$$

* Cas parallèles : rectangles et égalités de longueurs.

Exercice 11.

ABC est un triangle isocèle en A tel que l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.
Le cercle de diamètre $[AB]$ coupe le segment $[AC]$ en B'.

1. Faites une figure et justifiez que le point B' est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).
2. On note C' le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Justifiez que $AC' = AB'$.
3. Pourquoi a-t-on $BB' = CC'$?

Correction de l'exercice 11

1. Cercle circonscrit à $AB'B$ et $[AB]$ diamètre donc $AB'B$ rectangle en B.
2. Réciproque : triangle rectangle donc $[AC]$ diamètre du cercle circonscrit donc par symétrie $AC' = AB'$.
3. Longueurs égales d'après le théorème de Pythagore.

Exercice 12.

ABC est un triangle équilatéral, H est le projeté orthogonale du point C sur la droite (AB) et K est le projeté orthogonal du point H sur la droite (BC). Faites une figure et comparez les longueurs CH et HK.

Correction de l'exercice 12

$CH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$.

Égalité d'aires : $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}AB \times \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AB \times HK$ donc $HK = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$.

$$\boxed{HK = \frac{1}{2}CH.}$$

Exercice 13.

1. Dessinez le triangle isocèle EFG tel que $EF = 9$, $FG = 6$ et $GE = 9$.
2. Notons P le projeté orthogonal de E sur (GF) et R celui de P sur (EG). Dessinez les points P et R.
3. Comparez les longueurs EP et PR.

Exercice 14.

Soient ABC un triangle, I, J et K les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$, H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Faites une figure et indiquez quelle semble être la nature du quadrilatère $BIKJ$.
2. Prouvez que $HIKJ$ est un trapèze isocèle.

Correction de l'exercice 14

1. $BIKJ$ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles deux à deux d'après le théorème de Thalès (ou le théorème des milieux).
2. Nous déduisons de la question précédente que $HIKJ$ est un trapèze.
   $HI = \frac{1}{2}AB$ car ABH est rectangle en H et $JK = \frac{1}{2}AB$ d'après le théorème de Thalès donc $HI = JK$.

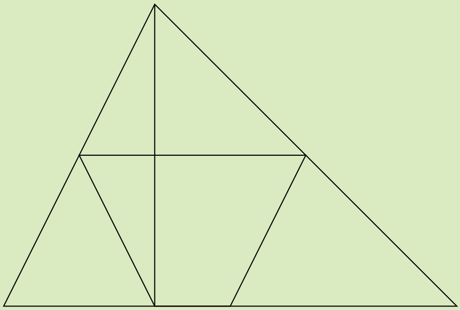
Exercice 15.

1.

IV Exercices

Exercice 16.

ABC est un triangle et H est la projection orthogonale de A sur $[BC]$.
I, J et K désignent les milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Démontrez que le quadrilatère $JIHK$ a deux côtés parallèles et les autres de même longueur (c'est un trapèze isocèle).



Exercice 17.

Comment déterminer le centre d'un cercle à l'aide de la seule équerre non graduée et d'un crayon ?

Correction de l'exercice 17

On trace un rectangle auquel le cercle soit circonscrit puis on détermine son centre qui est aussi celui du cercle.

Exercice 18.

Soient un cercle $\mathscr{C}$ de rayon 3 cm et de centre P, et un point A tel que $AP = 7$ cm. Tracez le cercle de diamètre $[PA]$ qui coupe $\mathscr{C}$ en U et S.

1. Démontrez que les droites (AU) et (SA) sont tangentes au cercle $\mathscr{C}$.
2. Calculez AU à 1 mm près.

Correction de l'exercice 18

1. Le cercle de diamètre $[PA]$ est circonscrit à PSA donc PSA est rectangle en A et donc (AS) est tangente à $\mathscr{C}$.
   Même raisonnement pour (SA).
2. Avec le théorème de Pythagore : $AU = \sqrt{7} - \sqrt{3} \approx 1$ en arrondissant au millimètre.