03 Identités remarquables et puissances.

I Identités remarquables.

1 Les identités à connaître par cœur.

2 Exercices.

Exercice 1.

Développez les expressions polynomiales suivantes.

a) $A(x) = (x+6)^2$.

b) $B(x) = (x-11)^2$.

c) $C(x) = \left(x+3^2\right)\left(x-3^2\right)$.

d) $D(x) = (2x-3)^2$.

e) $E(x) = (-7x+3)^2$.

f) $F(x) = (3x-6)(3x+6)$.

g) $G(x) = x(5x-7)^2$.

Exercice 2.

Factorisez les expressions polynomiales suivantes.

a) $A(x) = x^2 + 6x + 9$.

b) $B(x) = 49x^2 - 14x + 1$.

c) $C(x) = x^2 + 2x + 1$.

d) $D(x) = x^2 - 8$.

e) $E(x) = x^4 - 49$.

Exercice 3.

Résolvez les équations.

a) $x^2 = 81$.

b) $9x^2 - 42x + 49 = 0$.

c) $x^2 + 4 = 0$.

d) $x^4 - 16 = 0$.

e) $3x = -\dfrac{1}{4}x^2 - 9$.

f) $x^2 = 14x - 7$.

Exercice 4.

Soit $f : x \mapsto (x+1)^2 - 4$.

1. Développer $f(x)$.
2. Factoriser $f(x)$.
3. Parmi les trois formes précédentes de $f(x)$, choisir la plus adaptée pour :
   (a) calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(-3)$, $f(-1)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$.
   (b) résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (c) résoudre l'équation $f(x) = -4$.
   (d) résoudre l'équation $f(x) = -3$.

Exercice 5.

Résolvez les équations suivantes en vous ramenant à des équations du premier degré.

a) $4x^2 - (x+1)^2 = 0$.

b) $(2x+1)^2 - (x+2)^2 = 0$.

c) $(2x+7)^2 - 9(x+2)^2 = 0$.

d) $4(2x+7)^2 - 9(x+3)^2 = 0$.

e) $(4x^2 - 3x - 18)^2 = (4x^2 + 3x)^2$.

f) $(2x-3)(x-1)^2 = 4(2x-3)$.

g) $(5x-10)(x-3) - 3(x^2-4) = 0$.

h) $(x^2+1)(4-3x) - 8x + 6x^2 = 0$.

i) $9(x^2-1)^2 - 4(3x+1)^2 = 0$.

j) $\left(\frac{3x}{5} - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{3}\right)^2 = 0$.

k) $\left(\frac{2x+3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5-3x}{12}\right)^2$.

l) $(x^2-16)^2 = (x+4)^2$.

m) $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$.

n) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$.

o) $x^3 - 8 - 2(x^2-4) = 0$.

II Puissances.

1 Définition.

2 Puissance et opérations.

Exercice 6.

Simplifiez les expressions suivantes en utilisant les puissances :

a) $A = 12^4 \times 12^{-7}$.

b) $B = \left(3^2\right)^7$.

c) $C = 3^2 \times \left(\dfrac{1}{3^6}\right)^2$.

d) $D = n^4 \times (p^3 \times n)^3$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Vérifiez vos calculs en entrant exactement les formules dans votre calculatrice.

Exercice 7.

Complétez les égalités suivantes (en justifiant) :

a) $7^2 \times (3 \times 7)^5 = 3^? \times 7^?$

b) $\left(\dfrac{4^2}{5}\right)^3 = 4^? \times 5^?$

c) $\dfrac{11^2 \times 7}{2 \times 3} = 2^? \times 3^? \times 7^? \times 11^?$

d) $10^? \times 10^{-2} = 1$

3 Exercices.

Exercice 8.

Déterminez la forme irréductible de la fraction $\dfrac{138\,600}{147\,420}$.

Exercice 9.

1. Simplifiez l'expression suivante, dans laquelle x désigne un nombre inconnu non nul, en justifiant :
$$C = \frac{x^{-3} \times x^5}{\left(x^2\right)^3}$$
2. Calculez sous forme de fraction irréductible :
   (a) $A = 5^4 \times \left(3^{-2}\right)^2$.
   (b) $B = \left(\frac{7}{3}\right)^3 \div \left(\frac{4}{10}\right)^4$

Exercice 10.

L'écriture décimale infinie d'un nombre comporte un grand nombre de chiffres zéros. Par exemple $2 = \dots 0\,002{,}000\dots$. Or, dans cet exemple, il n'y a qu'un seul chiffre qui contienne de l'information ; nous dirons que 2 est *significatif*.

Les physiciens ont adoptés une écriture des nombres qui prend en compte la notion de chiffre significatif :
Par exemple : $1\,234{,}567\,8 = 1{,}234\,567\,8 \times 10^3$.

1. Donnez la notation scientifique des quatre nombres $123\,400\,000$ et $0{,}000\,123$ et 451 et $92\,384$.
2. Déterminez, sans calculatrice, l'écriture en notation scientifique du nombre
$$\frac{2\times 10^3 \times 2,4\times 10^{-6}}{1,2\times 10^{-10}\times 8\times 10^{12}}$$
3. Arrivés en fin de vie, certaines étoiles explosent violemment. Ce phénomène, appelé supernova, entraîne une forte augmentation de l'intensité lumineuse de l'astre qui peut briller comme 200 millions de soleils pendant plusieurs semaines.
   Exprimez en notation scientifique et sans user de la calculatrice, le rapport maximal entre l'intensité lumineuse d'une supernova et celle du soleil.

Exercice 11.

Soit x un réel non nul.
Écrivez chacun des nombres suivants sous la forme x^n, où n est un nombre entier relatif.

a) $A = x^4 \times (x^{-2})^3 \times x^5$.

b) $B = \dfrac{x^7}{x^8\times x^{-5}}$.

Exercice 12.

Écrivez les nombres sous la forme a^n avec a et des nombres entiers relatifs.

a) $A = 5^3\times 5^8$.

b) $B = 7^{-4}\times 7^{-5}$.

c) $C = (-3)^6 \times (-3)^9$.

d) $D = \dfrac{4^7}{4^4}$.

e) $E = \dfrac{10^{14}}{10^{20}}$.

f) $F = \dfrac{9^{-5}}{9^{11}}$.

Exercice 13.

Écrivez les nombres sous la forme 10^n avec n un nombre entier relatif.

a) $A = \dfrac{10^7}{10^3\times 10^2}$.

b) $B = \dfrac{10^{-7}\times 10^8}{10^5}$.

c) $C = \dfrac{\left(10^{-2}\right)^4}{10^{14}}$.

Exercice 14.

Soient a et b des nombres réels non nuls.
Écrivez les expressions littérales suivantes sous la forme $a^n \times b^p$ avec n et p des nombres entiers relatifs.

a) $A = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$.

b) $B = \dfrac{(ab)^5}{a^4}$.

c) $C = \dfrac{a^4}{a^3 \times b^{-7}}$.

d) $D = \left(\dfrac{b}{a}\right)^4 \times a^2$.

e) $E = \left(a^3 \times b\right)^2$.

f) $F = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 \times a^{-2}$.

g) $G = \left(a^{-5} \times b^{-2}\right)^{10}$.

h) $H = \left(\dfrac{a}{b^2}\right)^{-2} \times \left(\dfrac{a}{b^2}\right)^{-2} \times \left(\dfrac{1}{a^3}\right)^5$.

Exercice 15.

Écrivez chacun des nombres suivants sous la forme 3^p, ou p est un nombre entier relatif.

a) $A = 27 \times 9^5$.

b) $B = \dfrac{81^4 \times 9^{-2}}{27^{-3}}$.

c) $C = 9^{-3} \times 81^2$.

Exercice 16.

Écrivez chacun des nombres suivants sous la forme 2^p, ou p est un nombre entier relatif.

a) $A = 2^n \times 2^{n-1}$.

b) $B = \dfrac{2^{3-n} \times 2^{n+2}}{2^{-4n}}$.

c) $C = \left(2^{n-1}\right)^3 \times 2^{-n}$.

Exercice 17.

Factorisez les expressions suivantes pour n entier naturel non nul.

a) $3^n + 2 \times 3^{n+2}$.

b) $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2}$.

c) $\left(13^n\right)^2 + 13^n$.

III Analyse dimensionnelle.

Exercice 18. *Sujet C.R.P.E. 2020.*

Monsieur Piti, professeur des écoles à Tahiti, organise un voyage scolaire au Chili avec ses élèves. Le vol Papeete - Santiago du Chili fait une escale sur l'Île de Pâques, où ils passeront quelques jours.

Dans l'avion, l'écran du passager indique les informations du vol en direct, en différentes langues et unités. Monsieur Piti compare les données en anglais et en espagnol au même moment :

Anglais	*Espagnol*	*Traduction de M. Piti*
Ground speed : 530 mph	Velocidad : 853 km/h	Vitesse
Altitude : 35 000 ft	Altura : 10 668 m	Altitude
Outside air temperature : -58° F	Temperatura exterior : -50° C	Température extérieure
Distance to destination : 2497 mi	Distancia asta el destino : 4018 km	Distance restante
Local time at destination : 3 : 43 pm	La hora a la destinacion : 15 : 43	Heure locale à destination

Monsieur Piti a traduit les mots en français (dernière colonne), mais les unités sont différentes.

1. Quelle est la longueur d'un pied (1 ft) en millimètre ?
2. Si l'avion gardait cette vitesse constante, à quelle heure arriverait-il ?

Exercice 19. *Sujet de C.R.P.E. 2020.*

Un fabricant de sauce tomate utilise des boîtes de conserve de forme cylindrique de diamètre 99 mm et de hauteur 118 mm.
Le format de ces boîtes est appelé $\frac{4}{4}$.

> Rappel du volume d'un cylindre :
>
> $$V = \textit{Aire de la base} \times \textit{hauteur}.$$

Dans tout cet exercice, on négligera l'épaisseur du métal.

1. Calculer le volume, en cm^3, d'une boîte de conserve $\frac{4}{4}$. Arrondir le résultat à l'unité.
2. La contenance affichée sur la boîte est 850 mL. Vérifier qu'une boîte remplie à 95 % contient bien au moins 850 mL de sauce tomate.
3. On considère une nouvelle boîte de même hauteur et dont le diamètre est le double de la précédente. Le volume de la nouvelle boîte est-il le double du volume d'une boîte $\frac{4}{4}$? Justifier la réponse.

Exercice 20.

Sachant que l'accélération d'un objet est donnée par la formule

$$a = \frac{v}{t}$$

où v désigne la vitesse de l'objet et t le temps écoulé, donnez l'unité du système international qui permet de mesurer cette accélération.

Exercice 21.

Un élève propose l'équation suivante pour calculer la distance parcourue, x, par un objet :

$$x = vt^2$$

où v désigne la vitesse de l'objet et t le temps écoulé.

1. Vérifiez l'homogénéité (cohérence des unités) de cette équation (en cherchant l'unité des membres de gauche puis de droite de l'égalité).
2. Exprimez la vitesse en fonction du temps et de la distance parcourue x avec la formule proposée.

Exercice 22.

Le *principe fondamental de la dynamique* (ou *deuxième loi de Newton*) indique qu'un objet subit une accélération a qui est donné par

$$a = \frac{F}{m}$$

où F est la force, exprimée en newton (N) (unité qui mesure l'intensité d'une force), qui s'applique à l'objet et m la masse de cet objet.
Exprimez le newton (N) avec des unités du système international.

Exercice 23.

La force d'interaction gravitationnelle entre deux corps de masses m_1 et m_2 distants de d (la Terre et la Lune par exemple) est donnée par la relation

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

où G est une constante appelée *constante gravitationnelle*.
Exprimez l'unité de la constante gravitationnelle avec les unités du système international.

Exercice 24.

Cherchez l'erreur dans le raisonnement suivant :

1. Prenez d'abord : 1 kilogramme égale 1000 grammes et 2 kilogrammes égale 2000 grammes.
2. Multiplions chaque masse en kilo entre elles puis de même pour celles en grammes. On a donc l'égalité : 1×2 kg $= 1000 \times 2000$ g.
3. Ce qui fait donc : 2 kg = 2 000 000 g
4. Soit en changeant d'unité 2 kg = 2000 kg.

Exercice 25.

Le nombre d'or est obtenu comme le rapport de la largeur sur la longueur d'un certain rectangle.
Quelle est la dimension du nombre d'or ? Quelle est l'unité du système international qui permet de l'exprimer ?