03 Identités remarquables et puissances.

I Identités remarquables.

Une identité est une égalité qui est toujours vraie (contrairement par exemple à une équation).

1 Les identités à connaître par cœur.

Proposition 1

Pour tous nombres a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Démonstration

Soient a et b des nombres réels (sous-entendu quelconque).

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\times(a+b)\\ &= a\times a + a\times b + b\times a + b\times b\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous } a, b \in \mathbb{R},\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.}$$

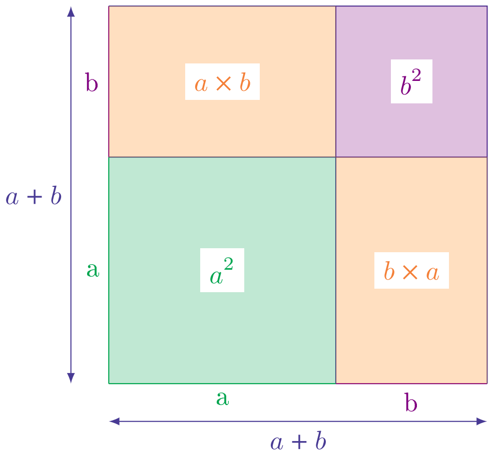
■

Exemples.

1. Utilisation pour trouver une forme développée réduite et ordonnée d'un polynôme : $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x\times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$.
2. Utilisation pour factoriser : $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2\times 3x\times 1 + 1^2$.

Remarques.

1. Une interprétation géométrique de cette identité avec des aires de rectangles.



L'aire du grand carré $(a+b)^2$ est obtenue comme la somme des aires des deux petits carrés a^2 et b^2 ainsi que de celle des rectangles $a \times b$ et $b \times a$.

Proposition 2

Pour tous nombres a et b :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Démonstration

Soient a et b des nombres réels (sous-entendu quelconque).

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b) \times (a-b) \\ &= a \times a + a \times (-b) + (-b) \times a + (-b) \times (-b) \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous } a, b \in \mathbb{R},\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.}$$

■

Proposition 3

Pour tous nombres a et b :

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

Démonstration

Soient a et b des réels.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a\times a + a\times(-b) + b\times a + b\times(-b)\\ &= a^2 - ab + ab + b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

■

2 Exercices.

Exercice 1.

Développez les expressions polynomiales suivantes.

a) $A(x) = (x+6)^2$.

b) $B(x) = (x-11)^2$.

c) $C(x) = \left(x+3^2\right)\left(x-3^2\right)$.

d) $D(x) = (2x-3)^2$.

e) $E(x) = (-7x+3)^2$.

f) $F(x) = (3x-6)(3x+6)$.

g) $G(x) = x(5x-7)^2$.

Exercice 2.

Factorisez les expressions polynomiales suivantes.

a) $A(x) = x^2 + 6x + 9$.

b) $B(x) = 49x^2 - 14x + 1$.

c) $C(x) = x^2 + 2x + 1$.

d) $D(x) = x^2 - 8$.

e) $E(x) = x^4 - 49$.

Exercice 3.

Résolvez les équations.

a) $x^2 = 81$.

b) $9x^2 - 42x + 49 = 0$.

c) $x^2 + 4 = 0$.

d) $x^4 - 16 = 0$.

e) $3x = -\frac{1}{4}x^2 - 9$.

f) $x^2 = 14x - 7$.

Exercice 4.

Soit $f : x \mapsto (x+1)^2 - 4$.

1. Développer $f(x)$.
2. Factoriser $f(x)$.
3. Parmi les trois formes précédentes de $f(x)$, choisir la plus adaptée pour :
   (a) calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(-3)$, $f(-1)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$.
   (b) résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (c) résoudre l'équation $f(x) = -4$.
   (d) résoudre l'équation $f(x) = -3$.

Correction de l'exercice 4

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2 \times x \times 1^2 - 4 \\ &= x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2 - 2^2 \\ &= [(x+1)+2] \times [(x+1)-2] \\ &= (x+3)(x-1) \end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 + 2 \times -3 \\ &= -3 \\ f(1) &= (1+3)(1-1) \\ &= 0 \\ f(-3) &= (-3+3)(-3-1) \\ &= 0 \\ f(-1) &= (-1+1)^2 - 4 \\ &= -4 \\ f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} - 3 \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f(x) = -4 &\Leftrightarrow (x+1)^2 - 4 = -4 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} f(x) = -3 &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = -3 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ ou } x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

Exercice 5.

Résolvez les équations suivantes en vous ramenant à des équations du premier degré.

a) $4x^2 - (x+1)^2 = 0$.

b) $(2x+1)^2 - (x+2)^2 = 0$.

c) $(2x+7)^2 - 9(x+2)^2 = 0$.

d) $4(2x+7)^2 - 9(x+3)^2 = 0$.

e) $(4x^2 - 3x - 18)^2 = (4x^2 + 3x)^2$.

f) $(2x-3)(x-1)^2 = 4(2x-3)$.

g) $(5x-10)(x-3) - 3(x^2-4) = 0$.

h) $(x^2+1)(4-3x) - 8x + 6x^2 = 0$.

i) $(9x^2-1)^2 - 4(3x+1)^2 = 0$.

j) $\left(\frac{3x}{5} - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{3}\right)^2 = 0$.

k) $\left(\frac{2x+3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5-3x}{12}\right)^2$.

l) $(x^2-16)^2 = (x+4)^2$.

m) $9x^3 + 18x^2 - x - 2 = 0$.

n) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$.

o) $x^3 - 8 - 2(x^2-4) = 0$.

II Puissances.

1 Définition.

Définition 1

Si x est un nombre et n un entier naturel, alors x^n, qui se lit « x puissance n » ou « x exposant n », est le nombre

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

Remarques.

1. $x^0 = 1$ et $x^1 = x$.
2. Lorsque l'exposant est 2 comme dans x^2 on dit « x au carré ».
3. Lorsque l'exposant est 3 comme dans x^3 on dit « x au cube ».
4. Par convention, si x est non nul, nous noterons son *inverse*

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

   En généralisant nous noterons pour n entier naturel

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

5. D'après cette définition et du fait de la règle du signe d'un produit : lorsque l'exposant n est pair x^n est positif et lorsque l'exposant n est impair x^n est du même signe que x.
   Cette idée se généralise à des fonctions que nous dirons paires ou impaires. Ainsi les fonctions linéaires sont impaires alors que les fonction affines qui ne sont pas linéaires ne sont ni paires ni impaires.

2 Puissance et opérations.

Les règles de priorités pour l'instant :

Priorité 1 Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires. La barre de fraction joue le même rôle que des parenthèses.

Priorité 2 Les exposants (puissances).

Priorité 3 Les multiplications et division (÷) en allant de gauche à droite.

Priorité 4 Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

Proposition 4 - Produits et quotients de puissances d'un même nombre.

Soient a un nombre, n et p deux entiers relatifs.

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad\qquad (a^n)^p = a^{n\times p}$$

Démonstration

Ce résultat se démontre en utilisant la définition de la puissance.

$$\begin{aligned} x^n \times x^p &= \Bigg(\underbrace{x\times\cdots\times x}_{n \text{ fois}}\Bigg)\times\Bigg(\underbrace{x\times\cdots\times x}_{p \text{ fois}}\Bigg) \\ &= \underbrace{x\times\cdots\times x}_{n \text{ fois}}\times\underbrace{x\times\cdots\times x}_{p \text{ fois}} \\ &= \underbrace{x\times\cdots\times x}_{n+p \text{ fois}} \\ &= x^{n+p} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} (x^n)^p &= \underbrace{\Bigg(\underbrace{x\times\cdots\times x}_{n \text{ fois}}\Bigg)\times\cdots\times\Bigg(\underbrace{x\times\cdots\times x}_{n \text{ fois}}\Bigg)}_{p \text{ fois}} \\ &= \underbrace{x\times\cdots\times x}_{n\times p \text{ fois}} \\ &= x^{n\times p} \end{aligned}$$

■

Remarques.

1. Ce résultats concerne les puissances d'un même nombre a.
2. Ce résultat sera très important pour développer les expressions algébriques faisant intervenir des lettres qu'il est impossible d'évaluer numériquement : $x^2(x-1) = x^2(x^1-1) = x^2\times x - x^2\times 1 = x^{2+1} - x^2 = x^3 - x^2$.
3. Il n'y a pas de résultat équivalent avec l'addition. Par exemple : $3^2 + 3^3 = 36$ et $3^{2+3} = 243$. Les puissances d'une somme s'obtiennent avec des formules comme la distributivité, la double distributivité, les identités remarquables.

Exercice 6.

Simplifiez les expressions suivantes en utilisant les puissances :

a) $A = 12^4 \times 12^{-7}$.

b) $B = \left(3^2\right)^7$.

c) $C = 3^2 \times \left(\dfrac{1}{3^6}\right)^2$.

d) $D = n^4 \times (p^3 \times n)^3$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Vérifiez vos calculs en entrant exactement les formules dans votre calculatrice.

Correction de l'exercice 6

1.
$$\begin{aligned} A &= 12^{4+(-7)} \\ &= 12^{-3} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} B &= 3^{2\times 7} \\ &= 3^{14} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} C &= 3^2 \times 3^{-6\times 2} \\ &= 3^2 \times 3^{-12} \\ &= 3^{2+(-12)} \\ &= 3^{-10} \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{10}{3}\right)^4 \\ &= \left(\frac{3}{5} \times \frac{10}{3}\right)^4 \\ &= 2^4 \end{aligned}$$

Proposition 5 - Puissances de multiplications ou divisions

Soient a et b deux nombres, et n un entier naturel.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

et si b est non nul :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Démonstration

■

Remarques.

1. Ce résultat concerne une même puissance de différents nombres.

Exercice 7.

Complétez les égalités suivantes (en justifiant) :

a) $7^2 \times (3 \times 7)^5 = 3^? \times 7^?$

b) $\left(\frac{4^2}{5}\right)^3 = 4^? \times 5^?$

c) $\frac{11^2 \times 7}{2 \times 3} = 2^? \times 3^? \times 7^? \times 11^?$

d) $10^? \times 10^{-2} = 1$

Correction de l'exercice 7

1.

$$\begin{aligned} 7^2 \times (3 \times 7)^5 &= 7^2 \times 3^5 \times 7^5 \\ &= 3^5 \times 7^2 \times 7^5 \\ &= 3^5 \times 7^{2+5} \\ &= 3^5 \times 7^7 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \left(\frac{4^2}{5}\right)^3 &= \frac{\left(4^2\right)^3}{5^3} \\ &= 4^{2\times3} \times 5^{-3} \\ &= 4^6 \times 5^{-3} \end{aligned}$$

3 Exercices.

Exercice 8.

Déterminez la forme irréductible de la fraction $\frac{138\,600}{147\,420}$.

Correction de l'exercice 8

En décomposant en facteurs premiers les numérateurs et dénominateurs nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{138\,600}{147\,420} &= \frac{2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11}{2^2 \times 3^4 \times 5 \times 7 \times 13} \\ &= \frac{2 \times 5 \times 11}{3^2 \times 13}\end{aligned}$$

La forme irréductible recherchée est $\frac{110}{11}$.

Exercice 9.

1. Simplifiez l'expression suivante, dans laquelle x désigne un nombre inconnu non nul, en justifiant :
$$C = \frac{x^{-3} \times x^5}{\left(x^2\right)^3}$$
2. Calculez sous forme de fraction irréductible :
   (a) $A = 5^4 \times \left(3^{-2}\right)^2$.
   (b) $B = \left(\frac{7}{3}\right)^3 \div \left(\frac{4}{10}\right)^4$

Correction de l'exercice 9

1.

$$\begin{aligned}C &= \frac{x^{-3} \times x^5}{\left(x^2\right)^3} \\ &= \frac{x^{-3+5}}{x^{2\times 3}} \\ &= \frac{x^2}{x^6} \\ &= x^2 \times x^{-6} \\ &= x^{2+(-6)}\end{aligned}$$

$C = x^{-4}$ ou $C = \frac{1}{x^4}$.

2. (a)

$$\begin{aligned} A &= 5^4 \times \left(3^{-2}\right)^2 \\ &= 5^4 \times 3^{-2\times 2} \\ &= 5^4 \times 3^{-4} \\ &= \frac{5^4}{3^4} \end{aligned}$$

Comme nous avons des décompositions en facteurs premiers des numérateurs et dénominateurs nous pouvons affirmer que la forme irréductible de A est

$$\boxed{A = \frac{625}{81}.}$$

(b)

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{7}{3}\right)^3 \div \left(\frac{4}{10}\right)^4 \\ &= \left(\frac{7}{3}\right)^3 \div \left(\frac{2}{5}\right)^4 \\ &= \frac{7^3}{3^3} \div \frac{2^4}{5^4} \\ &= \frac{7^3}{3^3} \times \frac{5^4}{2^4} \\ &= \frac{7^3 \times 5^4}{3^3 \times 2^4} \end{aligned}$$

Comme nous avons des décompositions en facteurs premiers des numérateurs et dénominateurs nous pouvons affirmer que la forme irréductible de B est

$$\boxed{B = \frac{214\,375}{144}.}$$

Exercice 10.

L'écriture décimale infinie d'un nombre comporte un grand nombre de chiffres zéros. Par exemple 2 = …0 002,000…. Or, dans cet exemple, il n'y a qu'un seul chiffre qui contienne de l'information ; nous dirons que 2 est *significatif*.

Les physiciens ont adoptés une écriture des nombres qui prend en compte la notion de chiffre significatif :

Définition 2

> La *notation scientifique* (ou *écriture scientifique*) d'un nombre décimal est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^n$, le nombre a ne possédant qu'un chiffre non nul avant la virgule ($1 \leqslant a < 10$) et n un entier.

Par exemple : 1 234,567 8 = 1,234 567 8 $\times 10^3$.

1. Donnez la notation scientifique des quatre nombres 123 400 000 et 0,000 123 et 451 et 92 384.
2. Déterminez, sans calculatrice, l'écriture en notation scientifique du nombre

$$\frac{2 \times 10^3 \times 2,4 \times 10^{-6}}{1,2 \times 10^{-10} \times 8 \times 10^{12}}$$

3. Arrivés en fin de vie, certaines étoiles explosent violemment. Ce phénomène, appelé supernova, entraîne une forte augmentation de l'intensité lumineuse de l'astre qui peut briller comme 200 millions de soleils pendant plusieurs semaines.
   Exprimez en notation scientifique et sans user de la calculatrice, le rapport maximal entre l'intensité lumineuse d'une supernova et celle du soleil.

Correction de l'exercice 10

1. $123\,400\,000 = 1,234 \times 10^8$ et $0,000\,123 = 1,23 \times 10^{-4}$ et $451 = 4 \times 10^2$ et $92\,384 = 9,2384 \times 10^4$.
2. $\frac{1}{2} \times 10^{-5} = 5 \times 10^{-6}$.
3. $200 \times 10^6 = 2 \times 10^8$.

Exercice 11.

Soit x un réel non nul.
Écrivez chacun des nombres suivants sous la forme x^n, où n est un nombre entier relatif.

a) $A = x^4 \times (x^{-2})^3 \times x^5$.

b) $B = \dfrac{x^7}{x^8 \times x^{-5}}$.

Correction de l'exercice 11

a) $A = x^3$.

b) $B = x^6$.

Exercice 12.

Écrivez les nombres sous la forme a^n avec a et des nombres entiers relatifs.

a) $A = 5^3 \times 5^8$.

b) $B = 7^{-4} \times 7^{-5}$.

c) $C = (-3)^6 \times (-3)^9$.

d) $D = \dfrac{4^7}{4^4}$.

e) $E = \dfrac{10^{14}}{10^{20}}$.

f) $F = \dfrac{9^{-5}}{9^{11}}$.

Correction de l'exercice 12

a) $A = 5^{3+8} = 5^{11}$.

b) $B = 7^{-4+(-5)} = 7^{-9}$.

c) $C = (-3)^{6+9} = (-3)^{15}$.

d) $D = 4^7 \times 4^{-4} = 4^{7+(-4)} = 4^3$.

e) $E = 10^{14} \times 10{-}20 = 10^{14+(-20)} = 10^{-6}$.

f) $F = 9^{-5} \times 9^{-11} = 9^{-5+(-11)} = 9^{-16}$.

Exercice 13.

Écrivez les nombres sous la forme 10^n avec n un nombre entier relatif.

a) $A = \dfrac{10^7}{10^3 \times 10^2}$.

b) $B = \dfrac{10^{-7} \times 10^8}{10^5}$.

c) $C = \dfrac{\left(10^{-2}\right)^4}{10^{14}}$.

Correction de l'exercice 13

a) $A = 10^2$.

b) $B = 10^{-4}$.

c) $C = 10^{-22}$.

Exercice 14.

Soient a et b des nombres réels non nuls.
Écrivez les expressions littérales suivantes sous la forme $a^n \times b^p$ avec n et p des nombres entiers relatifs.

a) $A = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$.

b) $B = \dfrac{(ab)^5}{a^4}$.

c) $C = \dfrac{a^4}{a^3 \times b^{-7}}$.

d) $D = \left(\dfrac{b}{a}\right)^4 \times a^2$.

e) $E = \left(a^3 \times b\right)^2$.

f) $F = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 \times a^{-2}$.

g) $G = \left(a^{-5} \times b^{-2}\right)^{10}$.

h) $H = \left(\dfrac{a}{b^2}\right)^{-2} \times \left(\dfrac{a}{b^2}\right)^{-2} \times \left(\dfrac{1}{a^3}\right)^5$.

Correction de l'exercice 14

a) $A = a^3b^{-3}$. b) $B = ab^5$. c) $C = ab^7$.

d) $D = a^{-2}b^4$. e) $E = a^6b^2$. f) $F = ab^{-3}$.

g) $G = a^{-50}b^{-20}$. h) $H = a^{-19}b^8$.

Exercice 15.

Écrivez chacun des nombres suivants sous la forme 3^p, ou p est un nombre entier relatif.

a) $A = 27 \times 9^5$. b) $B = \dfrac{81^4 \times 9^{-2}}{27^{-3}}$. c) $C = 9^{-3} \times 81^2$.

Correction de l'exercice 15

a) $A = 3^{13}$. b) $B = 3^{21}$. c) $C = 3^2$.

Exercice 16.

Écrivez chacun des nombres suivants sous la forme 2^p, ou p est un nombre entier relatif.

a) $A = 2^n \times 2^{n-1}$. b) $B = \dfrac{2^{3-n} \times 2^{n+2}}{2^{-4n}}$. c) $C = \left(2^{n-1}\right)^3 \times 2^{-n}$.

Correction de l'exercice 16

a) $A = 2^{2n-1}$. b) $B = 2^{4n+5}$. c) $C = 2^{2n-3}$.

Exercice 17.

Factorisez les expressions suivantes pour n entier naturel non nul.

a) $3^n + 2 \times 3^{n+2}$. b) $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2}$. c) $\left(13^n\right)^2 + 13^n$.

III Analyse dimensionnelle.

L'*analyse dimensionnelle* est un outil qui permet d'étudier les égalités ou les formules faisant intervenir des grandeurs physiques, et donc des unités différentes.

Rappelons quelques grandeurs et unités du système international.

Grandeur	Dimension	Unité du SI
Masse	M	kilogramme (kg)
Temps	T	seconde (s)
Longueur	L	mètre (m)
Température	θ	kelvin (K)
Intensité électrique	I	ampère (A)
Quantité de matière	N	mole (mol)
Intensité lumineuse	J	candela (cd)

À partir de ces unités de base il est possible de construire des unités dérivées. Ainsi la vitesse v, dans le système international, s'exprime en $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, que nous pourrons aussi noter m/s ou $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Exercice 18. *Sujet C.R.P.E. 2020.*

Monsieur Piti, professeur des écoles à Tahiti, organise un voyage scolaire au Chili avec ses élèves. Le vol Papeete - Santiago du Chili fait une escale sur l'Île de Pâques, où ils passeront quelques jours.

Dans l'avion, l'écran du passager indique les informations du vol en direct, en différentes langues et unités. Monsieur Piti compare les données en anglais et en espagnol au même moment :

Anglais	*Espagnol*	*Traduction de M. Piti*
Ground speed : 530 mph	Velocidad : 853 km/h	Vitesse
Altitude : 35 000 ft	Altura : 10 668 m	Altitude
Outside air temperature : -58° F	Temperatura exterior : -50° C	Température extérieure
Distance to destination : 2497 mi	Distancia asta el destino : 4018 km	Distance restante
Local time at destination : 3 : 43 pm	La hora a la destinacion : 15 : 43	Heure locale à destination

Monsieur Piti a traduit les mots en français (dernière colonne), mais les unités sont différentes.

1. Quelle est la longueur d'un pied (1 ft) en millimètre ?
2. Si l'avion gardait cette vitesse constante, à quelle heure arriverait-il ?

Correction de l'exercice 18

1. Exprimons un pied en millimètre.

   D'après l'énoncé :

$$35\,000 \text{ ft} = 10\,668 \text{ m}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{35\,000 \text{ ft}}{35\,000} &= \frac{10\,668 \text{ m}}{35\,000}\\
\frac{35\,000}{35\,000} \text{ ft} &= \frac{10\,668}{35\,000} \text{ m}\\
1 \text{ ft} &= 0,3048 \text{ m}\\
1 \text{ ft} &= 0,3048 \times 1000 \text{ mm}
\end{aligned}$$

$$\boxed{1 \text{ ft} = 304,8 \text{ mm.}}$$

2. Déterminons l'heure d'arrivée.

   Nous connaissons la vitesse de l'avion et la distance qu'il doit parcourir, par conséquent la durée du trajet restant est

$$\begin{aligned}
d_r &= \frac{4\,018 \text{ km}}{853 \text{ km/h}}\\
&= \frac{4\,018}{853}\ \frac{\text{km}}{\text{km} \cdot \text{h}^{-1}}\\
&= \frac{4\,018}{853} \text{ h}\\
&= \left(4 + \frac{606}{853}\right) \text{ h}\\
&= (4 \text{ h}) + \left(\frac{606}{853} \times 60 \text{ min}\right)\\
&\approx (4 \text{ h}) + (43 \text{ min})
\end{aligned}$$

   Par conséquent l'heure à l'arrivée sera, en arrondissant à la minute :

$$\begin{aligned}
(15 \text{ h}) + (43 \text{ min}) + (4 \text{ h}) + (43 \text{ min}) &= [(15+4) \text{ h}] + [(43+43) \text{ min}]\\
&= (19 \text{ h}) + (86 \text{ min})\\
&= (19 \text{ h}) + [(1 \times 60 + 26) \text{ min}]\\
&= (19 \text{ h}) + (1 \text{ h}) + (26 \text{ min})
\end{aligned}$$

   Finalement :

   $\boxed{\text{Lorsqu'ils arriveront l'heure locale sera : 19 h et 26 min.}}$

Nous pourrons également créer des sous-unités cm $= \frac{1}{100}$ m.

Exercice 19. *Sujet de C.R.P.E. 2020.*

Un fabricant de sauce tomate utilise des boîtes de conserve de forme cylindrique de diamètre 99 mm et de hauteur 118 mm.

Le format de ces boîtes est appelé $\dfrac{4}{4}$.

Rappel du volume d'un cylindre :

$$V = \textit{Aire de la base} \times \textit{hauteur}.$$

Dans tout cet exercice, on négligera l'épaisseur du métal.

1. Calculer le volume, en cm^3, d'une boîte de conserve $\dfrac{4}{4}$. Arrondir le résultat à l'unité.
2. La contenance affichée sur la boîte est 850 mL. Vérifier qu'une boîte remplie à 95 % contient bien au moins 850 mL de sauce tomate.
3. On considère une nouvelle boîte de même hauteur et dont le diamètre est le double de la précédente. Le volume de la nouvelle boîte est-il le double du volume d'une boîte $\dfrac{4}{4}$? Justifier la réponse.

Correction de l'exercice 19

1. Calculons le volume V_1 de la boîte.

   Puisque la base de ce cylindre est un disque de rayon $\frac{99}{2}$ mm, d'après la formule qui nous est rappelée :

$$\begin{aligned} V_1 &= \left[\pi\left(\frac{99}{2}\ \text{mm}\right)^2\right] \times (118\ \text{mm}) \\ &= \pi \times \left(\frac{99}{2}\right)^2 \times 118\ \text{mm}^2 \cdot \text{mm} \\ &= 289\,129{,}5\pi\ \text{mm}^3 \\ &= 289\,129{,}5\pi \left(\frac{1}{10}\ \text{cm}\right)^3 \\ &= 289\,129{,}5\pi \times \frac{1}{1000}\ \text{cm}^3 \\ &\approx 908{,}327\,11\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

$$V_1 \approx 908 \text{ cm}^3.$$

2. Calculons le volume V_2 correspondant à 95 % du volume de la boîte précédente.

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{95}{100} \times V_1 \\ &= \frac{95}{100} \times 289{,}129\,5\pi \text{ cm}^3 \\ &= \frac{95}{100} \times 289{,}129\,5\pi \text{ mL} \\ &\approx 862,9107 \text{ mL} \end{aligned}$$

Nous avons bien $V_2 > 850$ mL.

La boîte contient au moins 850 mL.

3. Nous pourrions faire les calculs numériques pour comparer les volumes de boîtes mais nous allons démontrer que ce résultat est inexacte pour tous les cylindres.

Démontrons que doubler le diamètre ne signifie pas doubler le volume.

Notons d le diamètre de la base du cylindre et h sa hauteur. Alors son volume est :

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \times h \\ &= \frac{1}{4}\pi d^2 h \end{aligned}$$

Le volume obtenu en doublant le diamètre est :

$$\begin{aligned} V_4 &= \pi \left(\frac{2d}{2}\right)^2 \times h \\ &= \pi d^2 h \end{aligned}$$

Nous remarquons que : $4V_3 = V_4$ et donc (hormis dans le cas de volumes nuls) :

lorsque le diamètre double le volume du cylindre ne double pas.

Il est toujours possible de multiplier ou diviser ente elles des unités pour créer de nouvelles unités, par contre il n'est possible d'additionner et soustraire que des unités identiques.

Exercice 20.

Sachant que l'accélération d'un objet est donnée par la formule

$$a = \frac{v}{t}$$

où v désigne la vitesse de l'objet et t le temps écoulé, donnez l'unité du système international qui permet de mesurer cette accélération.

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier l'homogénéité d'une formule ou d'une égalité en s'assurant que la dimension est la même des deux côtés de l'égalité.

Exercice 21.

Un élève propose l'équation suivante pour calculer la distance parcourue, x, par un objet :

$$x = vt^2$$

où v désigne la vitesse de l'objet et t le temps écoulé.

1. Vérifiez l'homogénéité (cohérence des unités) de cette équation (en cherchant l'unité des membres de gauche puis de droite de l'égalité).
2. Exprimez la vitesse en fonction du temps et de la distance parcourue x avec la formule proposée.

Un résultat incontournable de la mécanique :

Exercice 22.

Le *principe fondamental de la dynamique* (ou *deuxième loi de Newton*) indique qu'un objet subit une accélération a qui est donné par

$$a = \frac{F}{m}$$

où F est la force, exprimée en newton (N) (unité qui mesure l'intensité d'une force), qui s'applique à l'objet et m la masse de cet objet.
Exprimez le newton (N) avec des unités du système international.

Un autre résultat de la physique qui de plus est au programme de seconde.

Exercice 23.

La force d'interaction gravitationnelle entre deux corps de masses m_1 et m_2 distants de d (la Terre et la Lune par exemple) est donnée par la relation

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

où G est une constante appelée *constante gravitationnelle*.
Exprimez l'unité de la constante gravitationnelle avec les unités du système international.

Exercice 24.

Cherchez l'erreur dans le raisonnement suivant :

1. Prenez d'abord : 1 kilogramme égale 1000 grammes et 2 kilogrammes égale 2000 grammes.
2. Multiplions chaque masse en kilo entre elles puis de même pour celles en grammes. On a donc l'égalité : 1×2 kg = 1000×2000 g.
3. Ce qui fait donc : 2 kg = 2 000 000 g
4. Soit en changeant d'unité 2 kg = 2000 kg.

Exercice 25.

Le nombre d'or est obtenu comme le rapport de la largeur sur la longueur d'un certain rectangle.
Quelle est la dimension du nombre d'or ? Quelle est l'unité du système international qui permet de l'exprimer ?