02 Équations du premier degré.

I Généralités sur les équations.

Une *équation* est une égalité dans laquelle se trouvent des lettres (des *inconnues* ou *variables*) qui représentent des nombres (expression littérale).

Une équation est soit vraie, soit fausse, suivant les valeurs choisies pour remplacer les lettres.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie.

Exemples.

1. $3x^2 + 2$ n'est pas une équation, c'est une expression littérale.
2. $x = 2$ est une équation (qui est dite résolue en x).
3. $y = 2x$ est une équation avec deux inconnues.
4. $3x - 12 = 0$ est une équation de degré 1 (car l'inconnue est à la puissance 1).
5. $x^2 = 16$ est une équation de degré 2.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs qui rendent l'équation vraie. Une valeur qui rend une équation vraie est appelée une *solution* de l'équation.

Il n'y a pas une unique méthode de résolution des équations. Il y a presque autant de méthodes que d'équations.

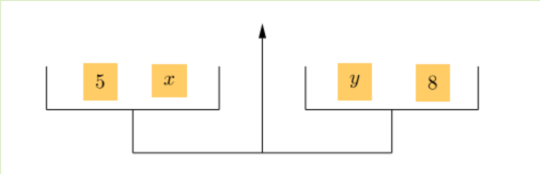
Nous apprendrons certaines de ces méthodes.

Pour simplifier la résolution et pour identifier à quel type d'équation nous avons à faire nous modifierons souvent l'équation de façon à obtenir une égalité à 0.

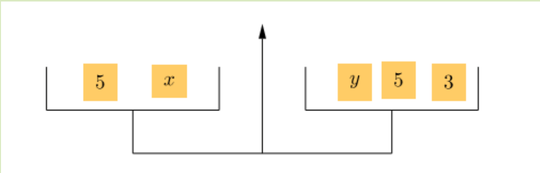
II Exemple.

Exercice 1.

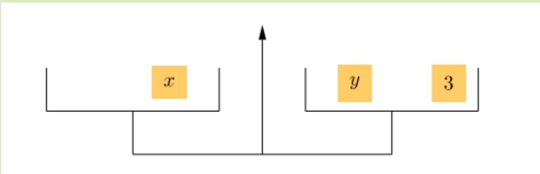
Trouvez le poids de x en fonction de celui de y grâce aux trois étapes suivantes.



$x + 5 = y + 8$



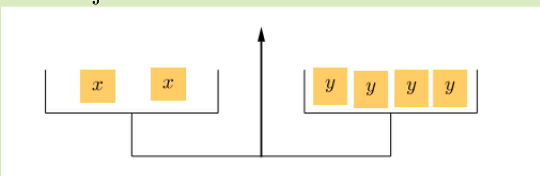
$x + 5 - 5 = y + 8 - 5$



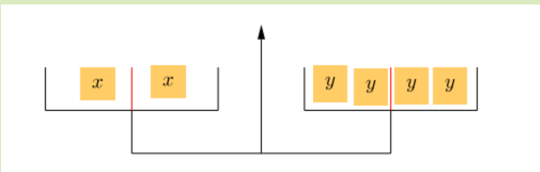
$x = y + 3$

Exercice 2.

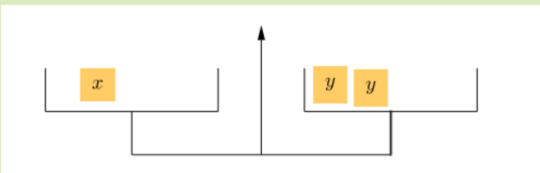
Même objectif :



$2x = 4y$



$\frac{2x}{2} = \frac{4y}{2}$



$x = 2y$

III Modifications autorisées sur les équations.

Théorème 1

On ne modifie pas les solutions d'une équation en additionnant (respectivement en soustrayant, respectivement en multipliant, respectivement en divisant) par un même nombre non nul des deux côtés de l'égalité.

Démonstration

Par exemple pour l'addition. En logique, pour toutes quantités a et b, et pour toute expression $F(x)$, si $a = b$ alors $F(a) = F(b)$.

En particulier lorsque $F(x) = x + c$, nous obtenons $F(a) = F(b)$ et donc $a + c = b + c$.

■

Remarques.

1. Attention lorsque vous divisez de vérifier que vous ne divisez pas par zéro.
2. On ne peut multiplier par zéro sans modifier les résultats de l'équation. Le pouvoir absorbant du zéro fait disparaître l'information contenue dans l'équation.
3. Ce résultat constitue une boîte à outils. Il indique des transformations autorisées sur une équation pour en trouver les solutions.
4. Il faut beaucoup s'entraîner pour savoir quelles transformations utiliser pour résoudre telle ou telle équation.
5. Il est bien sûr toujours possible d'ajouter ou soustraire 0 mais c'est sans intérêt.
6. Deux équations qui ont le même ensemble de solutions sont dite *équivalents*.

Exemples.

1. $x^3 + x^2 - 7 = 2x^3 + x^2 - 7$ et $x^3 = 2x^3$ ont le même ensemble de solutions.

IV Équations du premier degré.

Définition 1

Une *équation du preier degré* (ou équation linéaire, ou équation polynomiale de degré 1) est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$ax + b = 0$$

avec a et b des nombres fixés et x un nombre variable.

Remarques.

1. Les équations linéaires de degré 1 comportent des x mais pas de x^2 ou de x^3, ni de $\sqrt{x}$ ou de division par x.
2. Pour identifier l'équation du premier degré on regroupe tous les termes d'un même côté de l'égalité. Autrement dit il faut se ramener à une égalité à 0.
3. La résolution des équations du premier degré consiste à « isoler le x ». Supposons que a n'est pas nul.

$$ax + b = 0$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned} ax + b - b &= 0 - b \\ ax &= -b \\ \frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a}, \text{ car } a \neq 0 \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $ax + b = 0$ est $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Exemples.

1. $7 - 3x = -7x + 8$

Exercice 3.

Résolvez les équations du premier degré suivantes d'inconnue x :

1. $x + 4 = 7$
2. $3x = 12$
3. $-3x + 4 = 13$
4. $-3x + 4 = 14x - 7$

Correction de l'exercice 3

1. Résolvons l'équation.

$$x + 4 = 7$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} x + 4 - 4 &= 7 - 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{3\}$.

2. Résolvons l'équation.

$$3x = 12$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \frac{3x}{3} &= \frac{12}{3} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{4\}$.

3. Résolvons l'équation.

$$-3x + 4 = 13$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} -3x + 4 - 4 &= 13 - 4 \\ -3x &= 9 \\ \frac{-3x}{-3} &= \frac{9}{-3} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{-3\}$.

4. Résolvons l'équation.

$$-3x + 4 = 14x - 7$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} -3x + 4 - 14x &= 14x + 7 - 14x \\ -17x + 4 &= 7 \\ -17x + 4 - 4 &= 7 - 4 \\ -17x &= 3 \\ \frac{-17x}{-17} &= \frac{3}{-17} \\ x &= -\frac{3}{17} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{-\frac{3}{17}\right\}$.

Exercice 4.

Résolvez l'équation d'inconnue x :

$$\frac{2x}{3} = \frac{5x}{7}.$$

Correction de l'exercice 4

L'équation admet une unique solution qui est 0.

Exercice 5.

1. $2x - 3 = 5$,
2. $x + 4 = 5x - 2$,
3. $3(x+1) = 5x - 1$,
4. $-2(4-x) + 1 = 2$,
5. $\dfrac{2}{3}x = 4$,
6. $-3x = 4$,
7. $-6x = \dfrac{2}{3}$,
8. $-\dfrac{t}{3} = 2$,
9. $2(3x-1) - 5 = x + 1$,
10. $-3x + 4 = 2\left(x + \dfrac{2}{5}\right)$,
11. $3(x-2) - 1 = -2(x+4)$,
12. $2(4-3x) = -(x+5)$,
13. $2\left(\dfrac{x}{3} - 1\right) = x - \dfrac{1}{3}$,
14. $\dfrac{x-5}{7} = -3$,
15. $\dfrac{1}{4}x + \frac{1}{8} = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$,
16. $\dfrac{x-3}{2} = 2x + 1$.

Correction de l'exercice 5

1. $2x - 3 = 5$, $\mathscr{S} = \{4\}$.
2. $x + 4 = 5x - 2$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
3. $3(x+1) = 5x - 1$, $\mathscr{S} = \{1\}$.
4. $-2(4-x) + 1 = 2$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.
5. $\frac{2}{3}x = 4$, $\mathscr{S} = \{6\}$.
6. $-3x = 4$, $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$.
7. $-6x = \dfrac{2}{3}$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{-1}{9}\right\}$.

8. $-\frac{t}{3} = 2$, $\mathscr{S} = \{-6\}$.
9. $2(3x-1) - 5 = x + 1$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{8}{5}\right\}$.
10. $-3x + 4 = 2\left(x + \frac{2}{5}\right)$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{16}{25}\right\}$.
11. $3(x-2) - 1 = -2(x+4)$, $\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$.
12. $2(4-3x) = -(x+5)$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{11}{5}\right\}$.
13. $2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = x - \frac{1}{3}$, $\mathscr{S} = \{-5\}$.
14. $\frac{x-5}{7} = -3$, $\mathscr{S} = \{-16\}$.
15. $\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.
16. $\frac{x-3}{2} = 2x + 1$, $\mathscr{S} = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

Exercice 6.

Identifiez puis résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations linéaires parmi les équations d'inconnue x suivantes :

1. $x^2 = 3x - 1$
2. $-4x + 2 = 10$
3. $\sqrt{x} + 1 = 3$
4. $9x - 1 = 2x - 15$
5. $\dfrac{1}{x} + 3 = 1$
6. $\dfrac{1}{3} = \dfrac{3x}{6} - 7$
7. $5x - 7 - x = 4x$
8. $\sqrt{7}x - 2 = -\pi$

Correction de l'exercice 6

Toutes les expressions qui ne ressemble pas à des formules algébriques de fonctions affines ne correspondent pas à des équations linéaires. Concrètement, les expressions $\sqrt{x}$, x^2, x^3, ..., $\frac{1}{x}$ ne doivent pas apparaître.

1. Ce n'est pas une équation linéaire.
2. C'est une équation linéaire et $\mathscr{S} = \{-2\}$.
3. Ce n'est pas une équation linéaire.
4. C'est une équation linéaire et $\mathscr{S} = \{-2\}$.
5. Ce n'est pas une équation linéaire.
6. Il s'agit bien d'une équation linéaire.

$$\frac{1}{3} = \frac{3x}{6} - 7$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= \frac{3}{6}x - 7 \\
\frac{1}{3}+7 &= \frac{3}{6}x - 7+7 \\
\frac{22}{3} &= \frac{3}{6}x \\
\frac{6}{3}\times\frac{22}{3} &= \frac{6}{3}\times\frac{3}{6}x \\
\frac{22}{6} &= x \\
\frac{2\times 11}{2\times 3} &= x
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{11}{3}\right\}$.

7. Il s'agit bien d'une équation linéaire.
   Cependant la situation est un peu particulière comme le montre la résolution de cette équation.

$$5x - 7 - x = 4x$$

   équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
4x - 7 &= 4x \\
4x - 7 - 4x &= 4x - 4x \\
-7 &= 0
\end{aligned}$$

   Toute la difficulté est d'interpréter cette dernière égalité.
   Lorsque nous travaillons par équivalence toutes les phrases mathématiques écrites sont aussi vraies les unes que les autres. Or la dernière phrase que nous avons obtenue est, très clairement, fausse, donc la première est tout aussi fausse. Ainsi l'égalité proposée est toujours fausse, et ce, qu'elle que soit la valeur choisie pour x. Autrement dit il n'y a aucune solution.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \varnothing$.

8. La présence de $\sqrt{7}$ ou de π ne doit pas effrayer : il s'agit juste de nombres.
   C'est une équation du premier degré et :

$$\sqrt{7}x - 2 = -\pi$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
\sqrt{7}x - 2 + 2 &= -\pi + 2 \\
\sqrt{7}x &= -\pi + 2 \frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{7}} \qquad = \frac{-\pi + 2}{\sqrt{7}} \\
x &= \frac{-\pi + 2}{\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

Et il n'y a pas d'écriture plus simple de ce nombre.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{-\pi+2}{\sqrt{7}}\right\}$.

V Équation quotient nul.

Exemples.

1. $\dfrac{2x-8}{x-4} = 0$.
2. $\dfrac{6x-24}{-7x+11} = 0$.

Exercice 7.

Résolvez l'équation d'inconnue x :

$$\frac{3x+2}{7x-1} = 2.$$

Correction de l'exercice 7

Avec le produit en croix on perd l'équivalence. Il faut donc procéder à un raisonnement par analyse-synthèse qui est plus long.

* Supposons qu'on ait réussi à trouver un nombre x tel que $\frac{3x+2}{7x-1} = 2$, alors $3x + 2 = 2(7x-1)$.
  Cette dernière équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
3x + 2 &= 2 \times 7x - 2 \times 1 \\
3x + 2 &= 14x - 2
\end{aligned}$$

  Si x est une solution de l'équation alors forcément $x = \frac{4}{17}$.
* Vérifions que la seule solution possible est vraiment une solution :

$$\frac{3 \times \frac{4}{17} + 2}{7 \times \frac{4}{17} - 1} = 2$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{4}{17}\right\}$.

VI Équation produit-nul.

Le résultat suivant est fondamental pour résoudre un grand nombre d'équations :

Théorème 2

Soient a et b deux quelconques nombres réels.
Dire que : $ab = 0$ équivaut à dire que $a = 0$ ou $b = 0$.

Remarques.

1. On peut formuler ce résultat de la façon suivante : pour qu'un produit soit nul il faut et il suffit que l'un des facteur (au moins) soit nul.
2. Ce résultat se généralise à un produit de plus de deux facteurs.
3. Dire que : $\frac{a}{b} = 0$ équivaut à dire que $a = 0$. (b est forcément non nul).

Exercice 8.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $(-3x + 7)(4x - 6) = 0$

Correction de l'exercice 8

Nous reconnaissons une équation produit nul.

Résolvons l'équation.

$$(-3x + 7)(4x - 6) = 0$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
-3x + 7 = 0 &\quad \text{ou} \quad 4x - 6 = 0 \\
-3x + 7 - 7 = 0 - 7 &\quad \text{ou} \quad 4x - 6 + 6 = 0 + 6 \\
-3x = -7 &\quad \text{ou} \quad 4x = 6 \\
\frac{-3x}{-3} = \frac{-7}{-3} &\quad \text{ou} \quad \frac{4x}{4} = \frac{6}{4} \\
x = \frac{7}{3} &\quad \text{ou} \quad x = \frac{2 \times 3}{2^2}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \left\{\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.

Exercice 9.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $\dfrac{(x-3)(x+4)(x+4)}{(x+2)(x+4)(x-1)} = 0.$

Correction de l'exercice 9

L'expression fractionnaire qui apparaît dans cette équation ne peut s'annuler que si son numérateur s'annule. Cependant nous allons devoir être prudent car son dénominateur comportant des x il peut-y avoir des valeurs interdite. Ces valeurs interdites nous obligent à abandonner le raisonnement par équivalence et adopter le raisonnement par analyse-synthèse.

Déterminons par analyse-synthèse l'ensemble des solutions de cette équation.

* Analyse.

  Supposons que le nombre x soit une solution de l'équation.

  Alors forcément, l'expression étant fractionnaire, son numérateur doit être nul :

$$(x-3)(x+4)(x+4) = 0$$

  Nous reconnaissons une équation produit-nul.

  La précédente équation équivaut successivement à :

$$\begin{array}{ccccc} x-3=0 & \text{ou} & x+4=0 & \text{ou} & x+4=0 \\ x=3 & \text{ou} & x=-4 & \text{ou} & x=-4 \end{array}$$

  Nous voyons que, forcément, x ne peut être que l'un de ces deux nombres : 3 ou -4.

* Synthèse.

  En phase d'analyse nous avons vu qu'il n'y a que deux solutions possibles. Il faut maintenant vérifier que ce sont effectivement des racines.

  - Vérifions que 3 est bien une solution.

$$\begin{aligned} \frac{(3-3)(3+4)(3+4)}{(3+2)(3+4)(3-1)} &= \frac{0\times 7\times 7}{5\times 7\times 2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

  - Par contre -4 n'est pas une solution car sinon le dénominateur de l'expression fractionnaire s'annule. -4 est une valeur interdite.

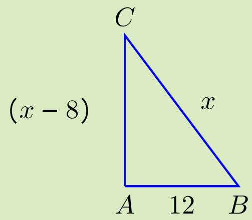
  Ainsi une seule des deux solutions convient.

  L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{3\}$.

VII Problèmes.

Exercice 10.

Trouver x pour que le triangle ABC soit rectangle en A.



Correction de l'exercice 10

ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, d'après le théorème de Pythagore.

Autrement dit il faut et il suffit que : $(x-8)^2 + 12^2 = x^2$.

Cette dernière équation équivaut successivement à :

$$x^2 - 2 \times x \times 8 + 8^2 + 144 = x^2$$
$$x^2 - 16x + 64 + 144 = x^2$$

En se ramenant à une égalité à 0 :

$$x^2 - 16x + 208 - x^2 = x^2 - x^2$$
$$-16x + 208 = 0$$

Nous reconnaissons une équation linéaire :

$$-16x + 208 - 208 = 0 - 208$$
$$-16x = -208$$
$$\frac{-16x}{-16} = \frac{-208}{-16}$$
$$x = 13$$

ABC est rectangle en A si et seulement si $x = 13$.

Exercice 11.

Déterminez cinq nombres impairs consécutifs dont la somme est égale à 405.

Exercice 12.

Déterminez l'ensemble des valeurs interdites pour le calcul défini pour x réel par

$$\frac{\sqrt{x}}{2x-3}$$

Correction de l'exercice 12

Il faut utiliser le fait qu'une racine carrée s'applique uniquement à un nombre positif et qu'un quotient ne peut avoir un dénominateur nul.

Exercice 13.

Résolvez l'équation

$$\frac{2x-4}{x}=3$$

Correction de l'exercice 13

1. Si x est solution de l'équation alors forcément :

$$\begin{aligned} 2x-4 &= 0 \\ 2x-4+4 &= 0+4 \\ 2x &= 4 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{4}{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

   Nous aurions pu utiliser un produit en croix.

2. On vérifie que 2 est bien solution : $\frac{2\times2-4}{2}=\frac{4-4}{2}=0$.

La solution de l'équation est 2.

Correction de l'exercice 13

L'expression « résolvez dans $\mathbb{R}$ signifie que nous garderons que les solutions qui sont dans $\mathbb{R}$.

Il y a deux manipulations possibles : en se ramenant à une expression fractionnaire nulle ou en utilisant le produit en croix.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation par analyse-synthèse.

* Analyse.

  Si $x\in\mathbb{R}$ est une solution de l'équation, alors nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{2x-4}{x} &= 3\\
\frac{2x-4}{x}-3 &= 3-3\\
\frac{2x-4}{x}-\frac{3x}{x} &= 0\\
\frac{2x-4-3x}{x} &= 0\\
\frac{-x-4}{x} &= 0\\
-x-4 &= 0\\
-x-4+4 &= 0+4\\
-x &= 4\\
-x\times(-1) &= 4\times(-1)\\
x &= -4
\end{aligned}$$

ou manipulation alternative utilisant le produit en croix :

$$\begin{aligned}
\frac{2x-4}{x} &= 3\\
\frac{2x-4}{x} &= \frac{3}{1}\\
(2x-4)\times(1) &= (3)\times(x)\\
2x-4 &= 3x\\
2x-4-2x &= 3x-2x\\
-4 &= x
\end{aligned}$$

* Synthèse.
  Nous avons vu (dans la phase d'analyse) qu'il ne peut y avoir qu'une seule solution à savoir -4.
  Or

$$\frac{2\times(-4)-4}{-4} = 3$$

donc -4 est bien une solution de l'équation.
Ici nous aurions pu avoir une difficulté si la solution trouvée avait été une valeur interdite.

> L'ensemble des solutions de l'équation est :
>
> $$\mathscr{S} = \{-4\}.$$

Exercice 14.

Dans une assemblée, quarante personnes ont plus de 40 ans, un quart a entre 30 et 40 ans et un tiers a moins de 30 ans. Quel est le nombre de personnes de cette assemblée ?

Correction de l'exercice 14

Le plus souvent l'inconnue qu'il est pertinent d'introduire est la grandeur recherchée.

Notons x le nombre de personnes dans l'assemblée.
L'énoncé se traduit alors par l'égalité :

$$40 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x = x$$

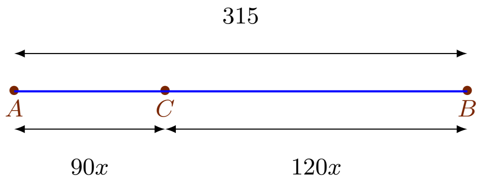
Il s'agit d'une équation linéaire dont l'unique solution est 96.

Exercice 15.

Deux trains partent à 4 h du matin, l'un de la ville A vers la ville B, et l'autre de la ville B située à 315 km de A en direction de la ville A. À quelle heure se fera la rencontre, sachant que le premier roule à 90 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ et le second à 120 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Correction de l'exercice 15

Notons x le temps, en heures, mis par les deux trains pour se croiser.



La distance parcourue par le train partant de A au moment du croisement est (en fonction de x) $90x$.

La distance parcourue par le train partant de B au moment du croisement est (en fonction de x) $120x$).

Ainsi x doit vérifier l'équation

$$90x + 120x = 315$$

Il s'agit d'une équation linéaire dont l'unique solution est $x = 1,5$.

Autrement dit les trains se croisent à 5 h 30.

Exercice 16.

Un litre d'une boisson contient 7 % de sirop. Quel volume d'eau pure doit-on rajouter pour qu'un litre de cette nouvelle boisson contienne 5 % de sirop ?

Correction de l'exercice 16

Déterminons le volume d'eau à rajouter.

Notons x le volume, exprimé en litre, d'eau pure rajouté dans la boisson.

Après mélange la boisson est composée de $\frac{7}{100}\times 1 = 0,07$ L de sirop, de $1-0,07 = 0,93$ L d'eau et de x litres d'eau.

On souhaite que le mélange contienne 5 % de sirop donc :

$$\frac{0,07}{0,07+0,93+x} = \frac{5}{100}$$

ce qui équivaut successivement à

$$\frac{0,07}{1+x} = \frac{5}{100}$$

Puisque $x+1 \neq 0$ (utilisation du produit en croix) :

$$\begin{aligned} 0,07\times 100 &= (1+x)\times 5 \\ 7 &= 5+5x \\ 7-5 &= 5+5x-5 \\ 2 &= 5x \\ \frac{2}{5} &= x \end{aligned}$$

Pour que la nouvelle boisson contienne 5 % de sirop il faut rajouter $0,4$ L.

Autre façon de raisonner : la quantité de sirop avant et après remplissage est la même donc :

$$\frac{7}{100}\times 1 = \frac{5}{100}\times(x+1)$$

Exercice 17.

Quel est le rayon d'un disque dont l'aire égale le périmètre ?

Correction de l'exercice 17

Remarquons que ce problème n'a pas de sens pour un physicien puisque l'aire et le périmètre ont des dimensions différentes.

Deux méthodes de résolution : par disjonction des cas ou par résolution de l'équation en factorisant.

Exercice 18.

$ABCD$ est un carré de côté a (a nombre strictement positif). M est un point du segment $[BC]$. Déterminez le point M de façon que le rapport de l'aire du triangle ABM à celle du trapèze $ADCM$ soit égale à $\frac{1}{3}$.

Exercice 19.

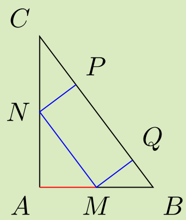
ABC est un triangle équilatéral de côté a (a nombre strictement positif). Par le point P symétrique de C par rapport à B on trace une droite (Δ) qui rencontre $[AB]$ en M et $[AC]$ en N. On pose $BM = x$.
Déterminez x tel que $CN = \dfrac{2a}{3}$.

Correction de l'exercice 19

Notons R le point de $[BC]$ de sorte que NCR est un triangle équilatéral.
Avec le théorème de Thalès : $\frac{PB}{PR} = \frac{BM}{CN}$ et $CN = \frac{2a}{3}$.

Exercice 20.

Un triangle ABC est rectangle en A. Le segment $[AB]$ mesure 3 cm, le segment $[AC]$ mesure 4 cm. Soit M un point de $[AB]$: on pose $AM = x$.



On construit un rectangle $MNPQ$ inscrit dans le triangle comme l'indique la figure ci-dessus.
Déterminez x pour que $MNPQ$ soit un carré.

Correction de l'exercice 20

Notons H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.

1. Les triangles ABC et ABH sont semblables donc $AH = \frac{3}{5} \times AC = \frac{3}{5} \times 4$.
   Configuration des triangles emboîtés : BMQ et BAH. Avec Thalès : $MQ = AH \times \frac{MB}{AB} = \frac{3}{5} \times 4 \times \frac{3-x}{3}x$.
2. Configuration des triangles emboîtés : AMN et ABC. Avec Thalès : $NM = \frac{5}{3}x$.
3. Pour qu'il y ait un carré il faut que $NM = MQ$ et donc : $\frac{15}{12}(3 - x) = \frac{5}{3}x$. D'où $x = \frac{36}{37}$.

Exercice 21.

Problème publié dans le Liber Abaci *(1202) par Léonard de Pise dit Fibonacci.*

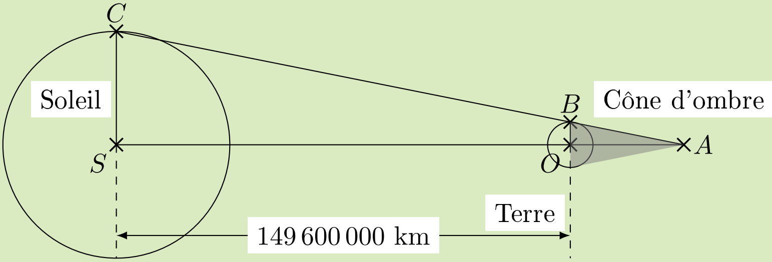
Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40 sont distantes de 50 pas ; entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps. Quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours ?

L'apport principal de *Léonard de Pise* (dit *Fibonacci*) fut l'introduction de la numération décimale dans le traité de comptabilité *Liber abaci* alors que l'Europe utilise encore les chiffres romains.

Son nom est resté célèbre jusqu'à nos jours grâce à une suite de nombres qui porte son nom et qui est associée au nombre d'or. Chaque terme de la suite de Fibonacci, qui commence par 0 puis 1, est la somme des deux précédents. Cette suite est souvent évoquée dans des thématiques ésotérique ou esthétique (comme le roman *Da Vinci code*).

Leonardo Fibonacci
(dall'opera *I benefattori dell'umanità*; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850)

Exercice 22.



1. La distance moyenne Soleil-Terre (calculée de centre à centre) est de 149 600 000 km.

   Le rayon du soleil est de 696 000 km, celui de la Terre de 6 360 km.

   Démontrez que la hauteur OA du cône d'ombre situé derrière la Terre est de 1 379 642 km par valeur approchée à l'unité près par excès.

2. Calculez le volume du cône d'ombre de sommet A et dont la base est formé par le disque de rayon OB.

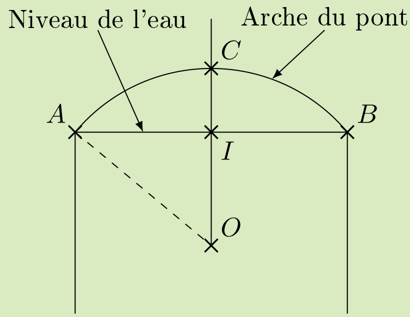
3. La distance moyenne Terre-Lune (calculée de centre à centre) est de 382 000 km. Le rayon de la lune est de 1 738 km Étudiez la possibilité d'éclipses totales de la Lune en période de pleine lune.

Exercice 23.

Extrait du C.R.P.E. 2017 (concours de recrutement des professeurs des écoles).

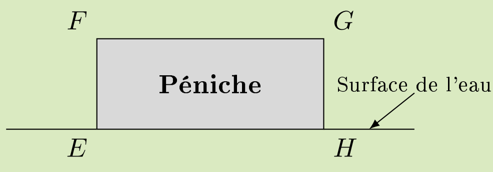
Péniche et pont.

Un pont a une arche en forme d'arc de cercle.
Lors d'une crue, l'eau atteint les sommets A et B des piliers du pont.
La hauteur maximale IC entre le niveau de l'eau et le sommet de l'arche est alors de 5 mètres. L'écartement AB entre les deux piliers du pont est de 24 mètres.
La situation est modélisée par le schéma suivant, qui n'est pas à l'échelle, sur lequel O est le centre de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et (CO) est l'axe de symétrie de la figure.



1. Montrer que le rayon OA de l'arche est $16,9$ m.

On assimile la coupe de la partie émergée d'une péniche, vue de face, à un rectangle de 4 mètres de haut et de 12 mètres de large.



La situation est modélisée par le schéma ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle sur lequel on a $EH = 12$ m et $FE = 4$ m.

2.

Correction de l'exercice 23

1. Déterminons OA.

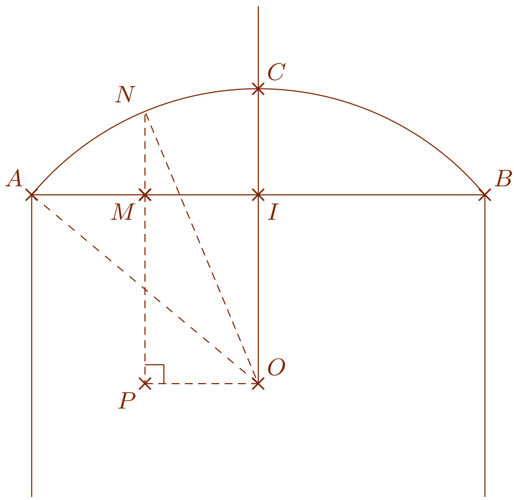
   Puisque (CO) est l'axe de symétrie de la figure, AIO est rectangle en I.

Donc, d'après le théorème de Pythagore : $AO^2 = OI^2 + IA^2$.
Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
OA^2 &= (OA - IC)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\
OA^2 &= (OA - 5)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2 \\
OA^2 &= OA^2 - 2 \times OA \times 5 + 5^2 + 12^2 \\
OA^2 &= OA^2 - 10 \cdot OA + 169 \\
OA^2 &= OA^2 - 2 \times OA \times 5 + 5^2 + 12^2 \\
OA^2 - OA^2 &= OA^2 - 10 \cdot OA + 169 - OA^2 \\
0 &= -10 \cdot OA + 169 \\
0 10 \cdot OA &= -10 \cdot OA + 169 10 \cdot OA \\
10 \cdot OA &= 169 \\
\frac{10 \cdot OA}{10} &= \frac{169}{10} \\
OA &= 16,9
\end{aligned}$$

$$\boxed{OA = 16,9 \text{ m}}$$

2. Notons M le point appartenant à $[AI]$ tel que $MI = 6$, N le point de l'arche du pont situé à la verticale de M et P le point de $[NM)$ tel que ONP soit un triangle rectangle en P.



Déterminons MN.

NOP est un triangle rectangle en P donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$NP^2 + PO^2 = ON^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} NP^2 &= OA^2 - 6^2 \\ &= 16,9^2 - 6^2 \end{aligned}$$

NP étant une longueur donc positive :

$$\begin{aligned} NP &= \sqrt{16,9^2 - 6^2} \\ &= \sqrt{249,61} \end{aligned}$$

Nous en déduisons la hauteur

$$\begin{aligned} MN &= NP - PM \\ &= NP - OI \\ &= \sqrt{249,61} - (OA - CI) \\ &= \sqrt{249,61} - (16,9 - 5) \\ &= \sqrt{249,61} - 11,9 \\ &\approx 3,899 \end{aligned}$$

La péniche ne pourra pas passer sous l'arche sans dommage.

VIII Exercices.

Exercice 24.

Résolvez l'équation en x.
Exemple :

$$\begin{aligned} x+3=0 &\iff x+3-3=0-3 \\ &\iff x=-3 \end{aligned}$$

a) $x+2=0.$	b) $x+7=0.$	c) $2\times x=0.$	d) $4x=0.$
e) $x\div 3=0.$	f) $\frac{x}{2{,}3}=0.$	g) $x-3=0.$	h) $x-12=0.$
i) $x-1,3=0.$	j) $3,7x=0.$	k) $x+3,7=0.$	l) $x+\frac{1}{2}=0.$
m) $x-\frac{13}{12}=0.$	n) $\frac{4}{3}x=0.$	o) $\frac{x}{\frac{1}{7}}=0.$	p) $\frac{\frac{x}{3}}{\frac{4}{7}}=0.$
q) $3-x=0.$	r) $-6-x=0.$	s) $-x+1=0.$	t) $-x+\frac{1}{3}=0.$

Correction de l'exercice 24

a) $x=-2.$	b) $x=-7.$	c) $x=0.$	d) $x=0.$
e) $x=0.$	f) $x=0.$	g) $x=3.$	h) $x=12.$
i) $x=1,3.$	j) $x=0.$	k) $x=-3,7.$	l) $x=-\frac{1}{2}.$
m) $x=\frac{13}{12}.$	n) $x=0.$	o) $x=0.$	p) $x=0.$
q) $x=3.$	r) $x=-6.$	s) $x=1.$	t) $x=\frac{1}{3}.$

Exercice 25.

Résolvez l'équation en x.

a) $x+12=0.$	b) $x+\pi=0.$	c) $\sqrt{2}\times x=0.$	d) $2,7x=0.$
e) $x\div\sqrt{7}=0.$	f) $\dfrac{x}{10^3}=0.$	g) $x-5=0.$	h) $x-14=0.$
i) $x-2,71=0.$	j) $8,2x=0.$	k) $x+1,05=0.$	l) $x+\dfrac{3}{11}=0.$
m) $x-\dfrac{2}{6}=0.$	n) $\dfrac{10^3}{12\,345}x=0.$	o) $\dfrac{x}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}=0.$	p) $\frac{\frac{x}{2}}{\frac{2}{3}}=0.$
q) $17-x=0.$	r) $-24-x=0.$	s) $-x+23=0.$	t) $-x+\dfrac{\pi}{2}=0.$

Correction de l'exercice 25

a) $x = -12$. b) $x = -\pi$. c) $x = 0$. d) $x = 0$.

e) $x = 0$. f) $x = 0$. g) $x = 5$. h) $x = 14$.

i) $x = 2,71$. j) $x = 0$. k) $x = -1,05$. l) $x = -\frac{3}{11}$.

m) $x = \frac{1}{3}$. n) $x = 0$. o) $x = 0$. p) $x = 0$.

q) $x = 17$. r) $x = -24$. s) $x = 23$. t) $x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 26.

Résolvez l'équation en x. α, μ et y désignent des nombres non nuls.
Exemple :

$$\begin{aligned} 2x+1=0 &\iff 2x+1-1=0-1 \\ &\iff 2x=-1 \\ &\iff \frac{2x}{2}=\frac{-1}{2} \\ &\iff x=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

a) $3x + 6 = 0$. b) $4x - 8 = 0$. c) $-2x + 4 = 0$.

d) $-7x - 63 = 0$. e) $8x - 2 = 0$. f) $6x - 7 = 0$.

g) $-5x + 9 = 0$. h) $-13x - 1 = 0$. i) $1,5x + 3 = 0$.

j) $2,7x - 1,2 = 0$. k) $-3,14x + 12 = 0$. l) $-1,32x - 7,1 = 0$.

m) $\frac{1}{2}x + 3 = 0$. n) $\frac{2}{7}x - \frac{5}{4} = 0$. o) $-\frac{3}{11}x + \frac{2}{5} = 0$.

p) $-\frac{13}{4}x - \frac{1}{7} = 0$. q) $\alpha x + 1 = 0$. r) $\mu x - y = 0$.

Correction de l'exercice 26

a) $x = -2$. b) $x = 2$. c) $x = 2$.

d) $x = -9$. e) $x = 4$. f) $x = \frac{7}{6}$.

g) $x = \frac{9}{5}$. h) $x = -\frac{1}{13}$. i) $x = -2$.

j) $x = \frac{12}{27}$. k) $x = \frac{1200}{314}$. l) $x = \frac{355}{66}$.

m) $x = -6$. n) $x = \frac{35}{8}$. o) $x = \frac{22}{15}$.

p) $x = -\frac{4}{91}$. q) $x = -\frac{1}{\alpha}$. r) $x = \frac{y}{\mu}$.

Exercice 27.

Résolvez l'équation en x. α, μ et y désignent des nombres non nuls.

a) $4x + 16 = 0.$
b) $8x - 64 = 0.$
c) $-6x + 18 = 0.$
d) $-11x - 121 = 0.$
e) $8x - 2 = 0.$
f) $8x - 9 = 0.$
g) $-5x + 12 = 0.$
h) $-17x - 6 = 0.$
i) $0,14x + 35 = 0.$
j) $12,1x - 1,21 = 0.$
k) $-6,53x + 89 = 0.$
l) $-3,65x - 67,4 = 0.$
m) $\frac{7}{9}x + 2 = 0.$
n) $\frac{4}{3}x - \frac{5}{8} = 0.$
o) $-\frac{4}{6}x + \frac{2}{4} = 0.$
p) $-\frac{2}{23}x - \frac{1}{9} = 0.$
q) $3\alpha x + 7 = 0.$
r) $\frac{1}{2}\mu x - y = 0.$

Correction de l'exercice 27

a) $x = -4.$
b) $x = 8.$
c) $x = 3.$
d) $x = -11.$
e) $x = \frac{1}{4}.$
f) $x = \frac{9}{8}.$
g) $x = \frac{12}{5}.$
h) $x = -\frac{6}{17}.$
i) $x = -\frac{3500}{14}.$
j) $x = 0,1.$
k) $x = \frac{89}{6,53}.$
l) $x = -\frac{67,4}{3,65}.$
m) $x = -\frac{18}{7}.$
n) $x = \frac{15}{32}.$
o) $x = \frac{3}{2}.$
p) $x = -\frac{23}{18}.$
q) $x = -\frac{7}{3\alpha}.$
r) $x = \frac{2y}{\mu}.$

Exercice 28.

Résolvez l'équation en x. α, μ et y désignent des nombres non nuls.
Exemple :

$$\begin{aligned} 2x + 1 = 3x &\iff 2x + 1 - 2x = 3x - 2x \\ &\iff 1 = x \end{aligned}$$

a) $3x + 6 = 4x.$
b) $4x - 8 = 6x.$
c) $-2x + 4 = 3x.$
d) $-7x - 63 = -4x.$
e) $8x - 2 = 2x.$
f) $6x - 7 = x.$
g) $-5x + 9 = -3x.$
h) $-13x - 1 = -2x.$
i) $1,5x + 3 = 1,2x.$
j) $2,7x - 1,2 = -2,1x.$
k) $-3,14x + 12 = 7x.$
l) $-1,32x - 7,1 = 8x.$
m) $\frac{1}{2}x + 3 = \frac{3}{2}x.$
n) $\frac{2}{7}x - \frac{5}{4} = -\frac{3}{7}x.$
o) $-\frac{3}{11}x + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}x.$
p) $-\frac{13}{4}x - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}x.$
q) $\alpha x + 1 = -3x.$
r) $\mu x - y = \mu.$

Correction de l'exercice 28

a) $x = 6$.
b) $x = -4$.
c) $x = \frac{4}{5}$.
d) $x = -21$.
e) $x = \frac{1}{3}$.
f) $x = \frac{7}{5}$.
g) $x = \frac{9}{2}$.
h) $x = -\frac{1}{11}$.
i) $x = -10$.
j) $x = 2$.
k) $x = -\frac{12}{3{,}86}$.
l) $x = -\frac{7{,}1}{6{,}68}$.
m) $x = 3$.
n) $x = \frac{7}{4}$.
o) $x = -\frac{2}{5} \times \frac{55}{18} = \frac{11}{9}$.
p) $x = -\frac{1}{7} \times \frac{28}{103} = -\frac{4}{721}$.
q) $x = -\frac{1}{3+\alpha}$.
r) $x = 1 + \frac{y}{\mu}$.

Exercice 29.

Résolvez l'équation en x. α, μ et y désignent des nombres non nuls.

a) $4x + 16 = 2x$.
b) $8x - 64 = -4x$.
c) $-6x + 18 = -x$.
d) $-11x - 121 = -10x$.
e) $8x - 2 = 4x$.
f) $8x - 9 = -7x$.
g) $12 - 5x = -11x$.
h) $-17x - 6 = -5x$.
i) $35 + 0,14x = 3x$.
j) $12,1x - 1,21 = 1,35x$.
k) $-6,53x + 89 = -7,1x$.
l) $-3,65x - 67,4 = -3x$.
m) $\frac{7}{9}x + 2 = \frac{5}{9}x$.
n) $-\frac{5}{8} + \frac{4}{3}x = -\frac{1}{3}x$.
o) $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{4} = \frac{5}{3}x$.
p) $-\frac{2}{23}x - \frac{1}{9} = \frac{1}{2}x$.
q) $3\alpha x + 7 = 3x$.
r) $\frac{1}{2}\mu x - y = \alpha x$.

Correction de l'exercice 29

a) $x = -8$.
b) $x = 16$.
c) $x = \frac{18}{5}$.
d) $x = -121$.
e) $x = \frac{1}{2}$.
f) $x = 9$.
g) $x = -2$.
h) $x = -\frac{1}{2}$.
i) $x = \frac{35}{2{,}86}$.
j) $x = \frac{1{,}21}{11{,}75}$.
k) $x = -\frac{89}{0{,}57}$.
l) $x = -\frac{67{,}4}{0{,}65}$.
m) $x = -9$.
n) $x = \frac{3}{8}$.
o) $x = \frac{1}{4}$.
p) $x = -\frac{46}{243}$.
q) $x = -\frac{7}{3(\alpha-1)}$.
r) $x = \frac{y}{\frac{1}{2}\mu-\alpha}$.

Exercice 30.

Résolvez l'équation en x. α, μ, t et y désignent des nombres non nuls.
Exemple :

$$\begin{aligned} 2x+1=4+3x &\iff 2x+1-2x=4+3x-2x \\ &\iff 1=4+x \\ &\iff 1-4=4+x-4 \\ &\iff -3=x \end{aligned}$$

a) $2x+4=x+6$.
b) $3x-4=7-6x$.
c) $-x+1=3x+2$.
d) $-7x-63=5-4x$.
e) $8x-2=-3+2x$.
f) $-7+6x=11-x$.
g) $-5x+9=-3x+7$.
h) $-13x-1=-2x+5$.
i) $1,5x+3=4-1,2x$.
j) $2,7x-1,2=-2,1x-0,2$.
k) $-3,14x+12=7x-8$.
l) $-1,32x-7,1=8x+0,9$.
m) $\frac{1}{2}x+3=\frac{3}{2}x+1$.
n) $\frac{2}{7}x-\frac{5}{4}=-\frac{3}{7}x-\frac{3}{2}$.
o) $-\frac{3}{11}x+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}x+\frac{1}{35}$.
p) $-\frac{13}{4}x-\frac{1}{7}=-\frac{15}{7}+\frac{3}{7}x$.
q) $\alpha x+1=-3x+t$.
r) $\mu x-y=3t-\mu x$.

Correction de l'exercice 30

a) $x=2$.
b) $x=\frac{11}{9}$.
c) $x=-\frac{1}{4}$.
d) $x=-\frac{68}{3}$.
e) $x=-\frac{1}{6}$.
f) $x=\frac{18}{7}$.
g) $x=1$.
h) $x=-\frac{6}{11}$.
i) $x=-\frac{1}{2{,}7}$.
j) $x=\frac{1}{4{,}8}$.
k) $x=\frac{20}{10{,}14}$.
l) $x=-\frac{8}{6{,}68}$.
m) $x=2$.
n) $x=-\frac{7}{20}$.
o) $x=\frac{13}{35}\times\frac{55}{18}=\frac{141}{126}$.
p) $x=-\frac{2}{103}$.
q) $x=\frac{t-1}{\alpha+3}$.
r) $x=\frac{3t+y}{2\mu}$.

Exercice 31.

Résolvez l'équation en x. α, μ, t et y désignent des nombres non nuls.

a) $3x + 3 = x + 9$.
b) $2x - 8 = 4 - 2x$.
c) $-x + 7 = 2x + 8$.
d) $-3x - 6 = 3 - 2x$.
e) $3x - 1 = -2 + x$.
f) $-4 + 7x = 7 - x$.
g) $-3x + 12 = -4x + 2$.
h) $-5x - 3 = -2x + 7$.
i) $2,5x + 5 = 2 - 3,2x$.
j) $4,3x - 2,5 = -2,9x - 0,5$.
k) $-3x + 1,1 = 7x - 1,1$.
l) $-2,2x - 0,1 = 8x + 0,1$.
m) $\frac{3}{2}x + 2 = \frac{1}{2}x + 3$.
n) $\frac{5}{2}x - \frac{2}{5} = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$.
o) $-\frac{6}{11}x + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}x + \frac{1}{3}$.
p) $-\frac{11}{2}x - \frac{2}{3} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2}x$.
q) $3\alpha x + 11 = -5\alpha x - t$.
r) $-\mu x + y = t + 5\mu x$.

Correction de l'exercice 31

a) $x = 3$.
b) $x = 3$.
c) $x = -\frac{1}{3}$.
d) $x = -9$.
e) $x = -\frac{1}{2}$.
f) $x = \frac{11}{8}$.
g) $x =$.
h) $x =$.
i) $x =$.
j) $x =$.
k) $x =$.
l) $x =$.
m) $x =$.
n) $x =$.
o) $x =$.
p) $x =$.
q) $x =$.
r) $x =$.