Seconde 2024/04/26. 1 heure.

Exercice 1.

On a placé un point M sur un quart de cercle de centre O et de rayon 5 cm et d'extrémités A et B. On note N et P les projetés orthogonaux de M respectivement sur (OA) et (OB).

Il s'agit d'étudier les variations de l'aire du rectangle $ONMP$ suivant la position du point M, et en particulier de déterminer la position pour laquelle l'aire est maximale et de calculer ce maximum.

Partie A. Deux cas particuliers.

Dans chacun des cas suivants dessinez une figure, calculez la longueur MN puis calculez l'aire du quadrilatère $ONMP$.

1. $ON = 4$ cm.
2. $ON = 2$ cm.

Partie B. Utilisation de la calculatrice.

1. On note x la longueur ON. Exprimez MN en fonction de x.
2. On appelle f la fonction qui, à toute valeur de x fait correspondre l'aire du rectangle $ONMP$.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
   (b) Démontrez que $f(x) = x\sqrt{25 - x^2}$.
3. À l'aide de la calculatrice, recopiez et complétez le tableau suivant avec des valeurs de $f(x)$ arrondies à 10^{-2} près.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

4. Placez les points correspondant au tableau ci-dessus dans un repère et représenter graphiquement la fonction f en choisissant judicieusement les unités.
5. En changeant le pas déterminez un encadrement à 10^{-1} près du maximum de f et de la valeur de x correspondante.
6. Établissez le tableau de variation de f.

Partie C. Conjecturer une valeur exacte par la géométrie.

1. On note H le projeté orthogonal de P et K celui de N sur (OM).
   (a) Démontrez que l'aire de $ONMP$ est égale à $PH \times 5$.

(b) On admet, en s'inspirant de la question précédente, que l'aire de $ONMP$ est maximale lorsque la longueur PH est elle-même maximale, c'est-à-dire lorsque H est le milieu de $[OM]$. Quelle est alors la nature de $ONMP$?

(c) Déduisez-en cette aire maximale et la valeur de x pour laquelle elle est atteinte.

Partie D. Démontrer un maximum algébriquement.

1. Calculez $f\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$.
2. Recopiez et complétez le raisonnement suivant.
   - Soit $x \in \left[0; \frac{5}{2}\sqrt{2}\right]$.
   - On a donc l'encadrement ...
   - Puisque ..., $0^2 \leqslant x^2 \leqslant \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2$.
   - Autrement dit : $0 \leqslant x^2 \leqslant \ldots$.
   - En multipliant par ... : $0 \geqslant -x^2 \geqslant -\frac{25}{2}$.
   - En ajoutant 25 : ...
   - En multipliant membre à membre le précédent encadrement avec $0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\sqrt{2}$, tous à termes positifs on obtient : ...
3. Déterminez de même un encadrement de $f(x)$ si $x \in \left[\frac{5}{2}\sqrt{2}; 5\right]$.
4. Déduisez-en le maximum de f et pour quelle valeur il est atteint.