40 Équations de droites.

I Équations cartésiennes.

Proposition 1

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan euclidien.

(i) Pour toute droite $\mathscr{D}$ il existe des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls) tels que $\mathscr{D}$ est formée de tous les points $M(x, y)$ pour lesquels x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$.

(ii) Réciproquement étant donné des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls), l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite.

Exercice 1.

Soient $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère cartésien, $A(3; -1)$ un point et $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-102\end{pmatrix}$.

1. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Démontrer que $B\left(0; -\frac{155}{2}\right) \in \mathscr{D}$.

Exercice 2.

Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteurs directeur $\vec{u}$.

1. $A(3; 4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.
2. $A(-2; 5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$.
3. $A(5; -10)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
4. $A(0; 4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 3.

Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et B.

1. $A(2; 1)$ et $B(5; -6)$.
2. $A(-3; 0)$ et $B(1; 1)$.
3. $A(-1; 7)$ et $B(0; 3)$.
4. $A(6; 8)$ et $B(3; 2)$.

Exercice 4.

Soient $A(-3;4)$ et $B(2;1)$ et $C(-1;-3)$.

1. Calculez les coordonnées du point M milieu de $[AC]$.
2. Déduisez-en une équation cartésienne de la médiane issue de B dans ABC.

Exercice 5.

Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ parallèle à (AB) et passant par C.

1. $A(5;4)$, $B(-1;2)$ et $C(4;-3)$.
2. $A(-5;-1)$, $B(6;4)$ et $C(1;2)$.

Exercice 6.

Déterminez une équation cartésienne de la droite (AB) puis vérifiez si A, B et C sont alignés.

1. $A(-2;4)$, $B(7;2)$ et $C(11;1)$.
2. $A(-4;-1)$, $B(4;3)$ et $C(44;23)$.
3. $A(-26;20)$, $B(51;6)$ et $C(30;10)$.
4. $A(20;18)$, $B(72;40)$ et $C(124;62)$.

Nous allons utiliser la remarque faites précédemment : si une droite a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

Exercice 7.

Déterminez un vecteur directeur de la droite d.

1. $d:\ 4x-3y+1=0$.
2. $d:\ x-5y+2=0$.
3. $d:\ -x+2y-5=0$.

Exercice 8.

Dites si les droites d et d' sont strictement parallèles, confondues ou sécantes.

1. $d:\ 2x-6y+5=0$ et $d':\ x-3y+2=0$.
2. $d:\ 4x-3y+1=0$ et $d':\ 5x-4y+2=0$.
3. $d:\ 3x+9y+2=0$ et $d':\ 12x+36y+8=0$.

II Équations réduites.

Les équations réduites sont des équations cartésiennes simplifiées qui font le lien entre équation cartésienne et fonction affine.

Pour une fonction affine chaque valeur indiquée sur l'axe des abscisses est reliée à une valeur sur l'axe des ordonnées. Les ordonnées, y, s'expriment en fonction des valeurs en abscisses, x.

Autrement dit pour définir un fonction nous devons obtenir une expression de la forme : $y = f(x)$. Nous allons l'obtenir à partir d'une équation cartésienne.

Proposition 2 - équations réduites.

Soient :
. $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan,
. $\mathscr{D}$ une droite du plan.

(i) Si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $x = r$ avec r une constante réelle.

(ii) Si $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $y = mx + p$ avec m et p des constantes réelles.

Proposition 3

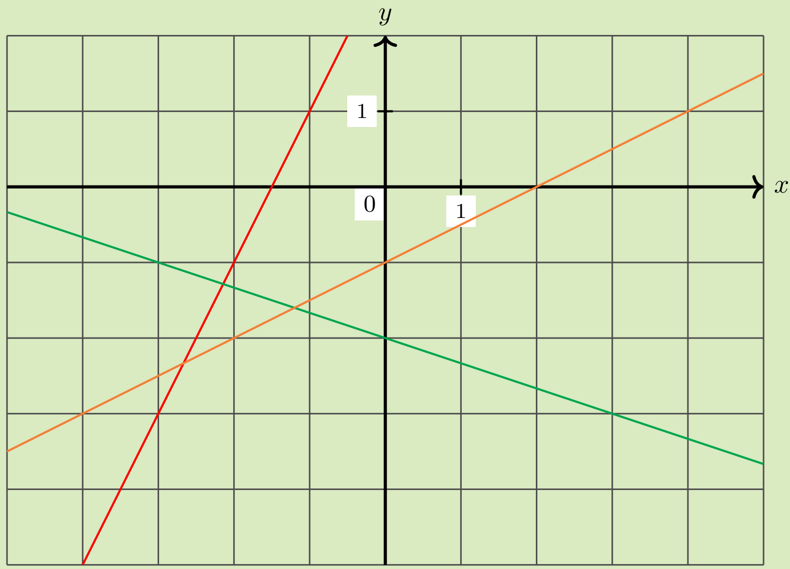
Soient :
. $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère d'un plan euclidien,
. A et B deux points distincts du même plan.

Si (AB) admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ alors

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exercice 9. ☯

Dans le repère ci-dessous sont dessinées des droites.



Déterminez les équations réduites des différentes droites.

Exercice 10.

Exercices 67 à 94 page 195 du manuel Indice de seconde.