

## 38 Fonctions paires et impaires.

Nous remarquons des symétries axiales ou centrales dans les courbes représentatives des fonctions de références : fonction carré et cube.

Ces propriétés géométriques se traduisent par des propriétés algébriques (concernant la formule de calcul).

### I Définition algébrique.

#### Définition 1

Soient :

- .  $\mathcal{D}_f$  un ensemble de réels symétrique par rapport à 0, autrement dit si  $x \in \mathcal{D}_f$ , alors  $-x \in \mathcal{D}_f$ ,
- .  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}_f$ .

Nous dirons que  $f$  est *paire* si et seulement si, quelque soit  $x \in \mathcal{D}_f$ ,

$$f(-x) = f(x).$$

Nous dirons que  $f$  est *impaire* si et seulement si, quelque soit  $x \in \mathcal{D}_f$ ,

$$f(-x) = -f(x).$$

### II Interprétation géométrique.

#### Proposition 1

Soient :

- .  $\mathcal{D}_f$  un ensemble de réels symétrique par rapport à 0,
- .  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction (définie sur  $\mathcal{D}_f$ ),
- .  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O, I, J)$ .

- (i)  $f$  est paire si et seulement si sa courbe représentative,  $\mathcal{C}_f$ , présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- (ii)  $f$  est impaire si et seulement si sa courbe représentative,  $\mathcal{C}_f$ , présente une symétrie par rapport à l'origine du repère.

## Exercice 1.

Parmi les tableaux de signe suivants, déterminez ceux qui peuvent correspondre à des fonctions paires ou impaires.

a)

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$	-	0	+

b)

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$	-	-	-

c)

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$		
$f$	-	0	+	0	-	0	+

d)

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
$f$	-	+	0	+	-

## Exercice 2.

Exercice 42 page 57 du manuel [lilivrescolaire.fr](http://lilivrescolaire.fr).

## Exercice 3.

Exercice 46 page 57 du manuel [lilivrescolaire.fr](http://lilivrescolaire.fr).

## Exercice 4.

Déterminez toutes les valeurs de  $a$  et  $b$  des réels pour lesquels la fonction affine  $f : x \mapsto ax + b$  est impaire.

Même question pour paire.

## Exercice 5.

Étudiez la parité de la fonction  $f$  dans les cas suivants (conjecturez avec la calculatrice, puis démontrez que la fonction est soit paire, soit impaire, soit rien du tout).

a)  $f(x) = x^3 - 3x$  et  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .

b)  $f(x) = x^2 + x$  et  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .

c)  $f(x) = x^{28}$  et  $\mathcal{D}_f = ]0, +\infty[$ .

d)  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  et  $\mathcal{D}_f = ]-1; 1[$ .