37 Problèmes avec équation et inéquations.

I Problème.

Une entreprise peut produire en un mois entre 0 et 50 machines agricoles.

On a modélisé le bénéfice de l'entreprise, exprimé en euros, par la fonction f définie, pour x un nombre réel par $f(x) = x^3 - 96x^2 + 2484x - 10000$ et x représentant le nombre de machines produites.

L'entreprise réalise des profits si son bénéfice est strictement positif.

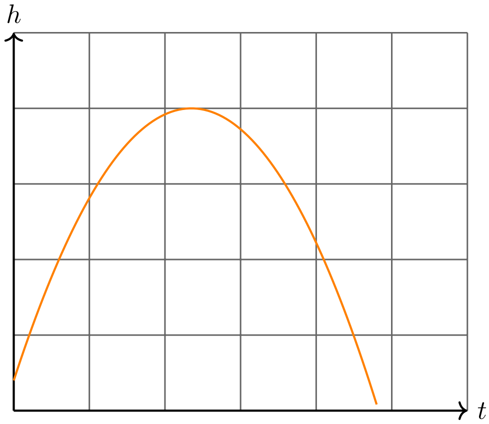
1. Quel est le domaine de définition de f cohérent avec le contexte économique ?
2. Avec la calculatrice affichez une représentation graphique de f. Vous choisirez sur l'axe des abscisses des x allant de 0 à 50 et, sur l'axe des ordonnées des y allant de $-10\,000$ à $10\,000$.
3. Dressez le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
4. Déterminez graphiquement le maximum puis la valeur entière de x pour lequel il est atteint. Calculez alors ce bénéfice.
5. L'entreprise cherche le nombre N de machines à produire pour réaliser un profit. Donnez un intervalle auquel appartient N.

II Problème.

À l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier se prépare à lancer des fusées à partir d'une plateforme située à 8 m de hauteur. Il dispose de deux types de fusées notées A et B.

1 Partie A : fusées de type A.

La hauteur h, en mètres, atteinte par les fusées de type A en fonction du temps de vol t, en dixièmes de seconde, est modélisée par la courbe ci-dessous.



1. Précisez les légendes et l'unité pour chaque axe du graphique.
2. Avec la précision permise par le graphique répondez aux questions suivantes.
   (a) À quelle hauteur une fusée arrive-t-elle au bout de 15 dixièmes de seconde ?
   (b) À quels temps de vol la hauteur d'une fusée est-elle égale à 40 m ?
   (c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par une fusée ?
   (d) Au bout de combien de temps retombe-t-elle sur le sol ?
   (e) Décrivez les variations de la hauteur de la fusée et tracez le tableau correspondant.

2 Partie B : fusées de type B.

Pour les fusées de type B, la hauteur, en mètre, en fonction du temps de vol, en dixièmes de seconde, est modélisée par la fonction g définie par $g(t) = -0,5(t-10)^2 + 58$ pour tout $t \in [0;20]$.

1. Calculez l'image de 6 par g. Que représente le résultat ?
2. À l'aide d'une calculatrice, établissez un tableau de valeur de $g(t)$ pour t variant de 0 à 20 avec un pas de 2.
3. Déduisez-en au bout de quels temps de vol la hauteur d'une fusée est égale à 40 m.
4. L'artificier souhaite faire exploser ses fusées de type B lorsqu'elles seront à leur hauteur maximale.
   (a) Déterminez le temps de vol qu'il doit programmer avant l'explosion.
   (b) Quelle est alors la hauteur maximale ?

III Problème.

On a placé un point M sur un quart de cercle de centre O et de rayon 5 cm et d'extrémités A et B. On note N et P les projetés orthogonaux de M respectivement sur (OA) et (OB).

Il s'agit d'étudier les variations de l'aire du rectangle $ONMP$ suivant la position du point M, et en particulier de déterminer la position pour laquelle l'aire est maximale et de calculer ce maximum.

1 Partie A. Deux cas particuliers.

Dans chacun des cas suivants dessinez une figure, calculez la longueur MN puis calculez l'aire du quadrilatère $ONMP$.

1. $ON = 4$ cm.
2. $ON = 2$ cm.

2 Partie B. Utilisation de la calculatrice.

1. On note x la longueur ON. Exprimez MN en fonction de x.
2. On appelle f la fonction qui, à toute valeur de x fait correspondre l'aire du rectangle $ONMP$.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
   (b) Démontrez que $f(x) = x\sqrt{25 - x^2}$.
3. À l'aide de la calculatrice, recopiez et complétez le tableau suivant avec des valeurs de $f(x)$ arrondies à 10^{-2} près.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

4. Placez les points correspondant au tableau ci-dessus dans un repère et représenter graphiquement la fonction f en choisissant judicieusement les unités.
5. En changeant le pas déterminez un encadrement à 10^{-1} près du maximum de f et de la valeur de x correspondante.
6. Établissez le tableau de variation de f.

3 Partie C. Conjecturer une valeur exacte par la géométrie.

1. On note H le projeté orthogonal de P et K celui de N sur (OM).
   (a) Démontrez que l'aire de $ONMP$ est égale à $PH \times 5$.

(b) On admet, en s'inspirant de la question précédente, que l'aire de $ONMP$ est maximale lorsque la longueur PH est elle-même maximale, c'est-à-dire lorsque H est le milieu de $[OM]$. Quelle est alors la nature de $ONMP$?

(c) Déduisez-en cette aire maximale et la valeur de x pour laquelle elle est atteinte.

4 Partie D. Démontrer un maximum algébriquement.

1. Calculez $f\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$.
2. Recopiez et complétez le raisonnement suivant.
   - Soit $x \in \left[0; \frac{5}{2}\sqrt{2}\right]$.
   - On a donc l'encadrement ...
   - Puisque ..., $0^2 \leqslant x^2 \leqslant \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2$.
   - Autrement dit : $0 \leqslant x^2 \leqslant \ldots$.
   - En multipliant par ... : $0 \geqslant -x^2 \geqslant -\frac{25}{2}$.
   - En ajoutant 25 : ...
   - En multipliant membre à membre le précédent encadrement avec $0 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\sqrt{2}$, tous à termes positifs on obtient : ...
3. Déterminez de même un encadrement de $f(x)$ si $x \in \left[\frac{5}{2}\sqrt{2}; 5\right]$.
4. Déduisez-en le maximum de f et pour quelle valeur il est atteint.

IV Problème.

Soit f la fonction f définie sur $]-\infty;0[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - 1$. Notons $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives.

1. (a) Tracez $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un même repère.
   (b) Résolvez graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.
2. (a) Démontrez que pour tout réel x strictement négatif $f(x) - g(x) = \dfrac{-x^2 + x + 2}{x}$.
   (b) Démontrez que pour tout x réel $-x^2 + x + 2 = (x+1)(-x+2)$.
3. (a) Déterminez le signe de $f(x) - g(x)$ sur $]-\infty, 0[$.
   (b) Déduisez-en les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ dans $]-\infty, 0[$.
4. Comparez les réponses des questions 1b et 3c.

V Problème.

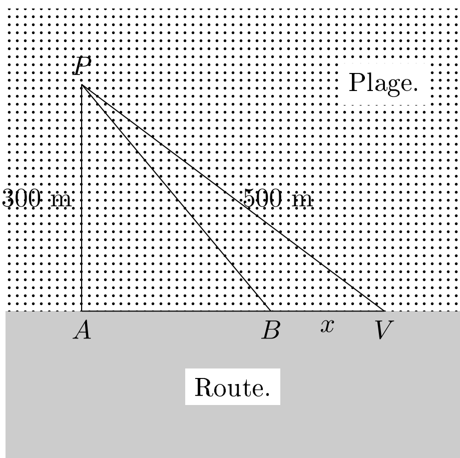
Le prix de location d'un camion est de 75 € auquel s'ajoute le coût d'un plein de carburant à $1,50$ € le litre. La camionnette consomme 7 litres aux 100 km.

1. (a) Quel est le coût de l'utilisation du véhicule pour un trajet de 80 km ?
   (b) Quel est le coût moyen de chaque kilomètre parcouru lors de ce trajet ?
2. Soit x le nombre de kilomètres parcourus.
   (a) Exprimez en fonction de x le coût total, en euros, du déplacement.
   (b) Exprimez en fonction de x le coût moyen, $C_M(x)$, en euros, d'un kilomètre parcouru lors d'un déplacement de x kilomètres.
   (c) À partir de combien de kilomètres parcourus le coût moyen d'un kilomètre parcouru est-il inférieur à $2,4$ € ? Arrondissez au kilomètre.

VI Problème.

On schématisé ci-dessous les trajets possibles pour un vacancier rejoigne son parasol situé en P, sur une plage, sachant qu'il part de son véhicule stationné en V.

S'il va en ligne droite de la voiture au parasol il doit parcourir une distance de 500 m dans le sable. Sa vitesse de marche dans le sable est de $3\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ et sur la route de $6\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.



1. (a) Combien de temps le vacancier mettrait-il à rejoindre son parasol s'il marchait dans le sable tout de suite, en ligne droite, le long du segment $[VP]$?

   (b) Montrez que s'il longeait la plage sur la route, le long du segment $[VA]$, et marchait dans le sable sur la plus courte distance possible, le long de $[AP]$, son trajet aurait la même durée.

2. Le vacancier se demande s'il pourrait rejoindre son parasol en moins de 9 min.
   Soit B un point du segment $[AV]$. On note x la distance BV parcourue par le vacancier sur la route avant de marcher sur la plage le long du segment $[BP]$.
   On considère la fonction t qui à chaque x, en mètre, associe le temps mis, en minutes, pour rejoindre le parasol en suivant le chemin V, B, P.

   (a) Justifiez que $BP = \sqrt{250\,000 - 800x + x^2}$.

   (b) Déduisez-en que pour tout x dans l'intervalle $[0; 400]$:

   $$t(x) = 0,01x + 0,02\sqrt{250\,000 - 800x + x^2}.$$

   (c) À l'aide de la calculatrice déterminez si le vacancier peut rejoindre son parasol en moins de 9 minutes.

VII Problème.