

## 35 Projeté orthogonal.

### I Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

#### Définition 1

Soient  $M$  un point et  $\Delta$  une droite du plan euclidien.

On appelle *projeté orthogonal de  $M$  sur  $\Delta$*  le point d'intersection de  $\Delta$  et de la perpendiculaire à  $\Delta$  passant par  $M$ .

#### Exercice 1.

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points du plan.

1. Après avoir placé les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans un repère, dessinez les projetés orthogonaux, respectivement,  $A'$  de  $A$  sur  $(BC)$ ,  $B'$  de  $B$  sur  $(AC)$  et  $C'$  de  $C$  sur  $(AB)$ .
2. Que remarquez-vous à propos des droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$ ?

#### Proposition 1

Le projeté orthogonal  $H$  d'un point  $M$  sur une droite  $\Delta$  est le point de la droite  $\Delta$  le plus proche du point  $M$ .

#### Exercice 2.

Montrez que tout point d'une bissectrice d'un angle est équidistant aux demi-droites formant l'angle.

#### Exercice 3.

On considère dans un repère orthonormé  $A(-2; 2)$ ,  $B(3; 7)$  et  $C(10; 8)$ .

1. Démontrez que  $H(4; 5)$  est le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(AC)$ .
2. Comment appelle-t-on  $(HB)$  pour le triangle  $ABC$ ?
3. Calculez la distance  $d(B; (AC))$  de  $B$  à  $(AC)$ .

### II Exercices

## Exercice 4.

Démontrez le résultat suivant.

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points alignés, distincts deux à deux. Si on note  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  leurs projetés orthogonaux respectifs sur une droite  $\Delta$ , non perpendiculaire à la droite  $(AB)$  alors :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

## Exercice 5.

$ABC$  est un triangle isocèle en  $A$  tel que l'angle  $\widehat{BAC}$  est aigu.

Le cercle de diamètre  $[AB]$  coupe le segment  $[AC]$  en  $B'$ .

1. Faites une figure et justifiez que le point  $B'$  est le projeté orthogonal du point  $B$  sur la droite  $(AC)$ .
2. On note  $C'$  le projeté orthogonal du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ . Justifiez que  $AC' = AB'$ .
3. Pourquoi a-t-on  $BB' = CC'$  ?

## Exercice 6.

$ABC$  est un triangle équilatéral,  $H$  est le projeté orthogonale du point  $C$  sur la droite  $(AB)$  et  $K$  est le projeté orthogonal du point  $H$  sur la droite  $(BC)$ . Faites une figure et comparez les longueurs  $CH$  et  $HK$ .

## Exercice 7.

1. Dessinez le triangle isocèle  $EFG$  tel que  $EF = 9$ ,  $FG = 6$  et  $GE = 9$ .
2. Notons  $P$  le projeté orthogonal de  $E$  sur  $(GF)$  et  $R$  celui de  $P$  sur  $(EG)$ . Dessinez les points  $P$  et  $R$ .
3. Comparez les longueurs  $EP$  et  $PR$ .

## Exercice 8.

Soient  $ABC$  un triangle,  $I$ ,  $J$  et  $K$  les milieux respectifs des côtés  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[AC]$ ,  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$ .

1. Faites une figure et indiquez quelle semble être la nature du quadrilatère  $BIKJ$ .
2. Prouvez que  $HIKJ$  est un trapèze isocèle.

## Exercice 9.

- 1.