

34 Position relative de courbes.

I Le cas général.

Définition 1

Soient :

- . a et b deux nombres réels avec $a < b$,
- . f et g des fonctions définies sur $[a, b]$.

*La courbe représentative \mathcal{C}_f , de f , est dite **au-dessus de la courbe représentative \mathcal{C}_g , de g , sur $[a, b]$** si et seulement si : $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.*

II Avec des fonctions de référence.

Dans cette partie nous parlerons des courbes d'équations $y = f(x)$ plutôt que des courbes représentatives des fonctions.

Proposition 1

La courbe d'équation $y = x$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$ sur $[0; 1]$ et au-dessous sinon.

Proposition 2

La courbe d'équation $y = x$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = x^3$ sur $] -\infty, -1] \cup [0; 1]$ et au-dessous sinon.

Proposition 3

La courbe d'équation $y = x^2$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = x^3$ sur $[0; 1]$ et au-dessous sinon.

On remarque que sur $[0; 1]$, $x \geq x^2 \geq x^3$ et sur $[1, +\infty[$, $x \leq x^2 \leq x^3$. On peut d'ailleurs conjecturer une généralisation de ce résultat à d'autres puissances ...

III Exercices.

Exercice 1.

Soient $f : x \mapsto x + 1$ et $g : x \mapsto x^2 - 2x - 9$ des fonctions définies sur \mathbb{R} .

1. Exprimez $g(x) - f(x)$ en fonction de x .
2. Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$.
3. Étudiez le signe de $g(x) - f(x)$.
4. Donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) - f(x)$.
5. Décrivez la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

