32 Monotonie.

I De la variation des fonctions.

1 De la géométrie ...

2 ... à l'analyse ...

Définition 1

Soient :

. $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$ un ensemble,

. $E \subset \mathscr{D}_f$ un ensemble,

. $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction.

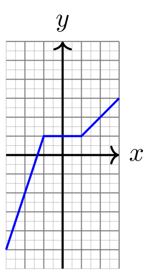
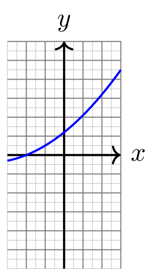
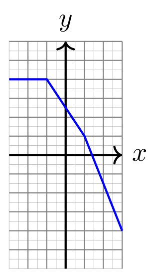
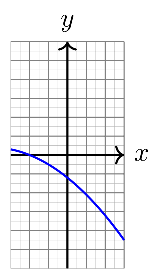
Nous dirons que f est *croissante sur* E lorsque, quels que soient x_1 et x_2 choisis dans E, si $x_1 < x_2$ alors, forcément, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Exercice 1.

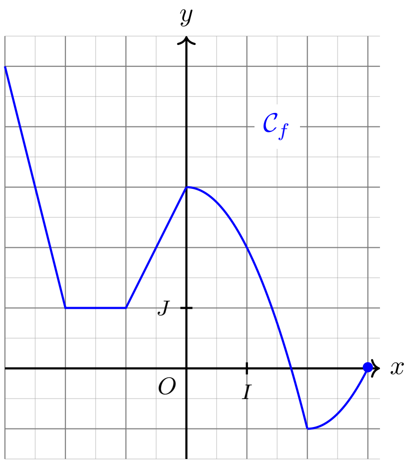
1. Démontrez que $(x+1)(x-2) > 0$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.
2. Déduisez en que, pour $x \in]2, +\infty[$, $x^2 - x > 2$.
3. Déduisez-en, finalement que $\sqrt{x^2 - x} > \sqrt{2}$ pour tout $x \in]2, +\infty[$.

3 ... au français ...

Les *fonctions monotones* sont les fonctions dont le sens de variation ne change pas.

Fonction *croissante*.	Fonction *strictement croissante*.	Fonction *décroissante*.	Fonction *strictement décroissante*.
			

Une fonction n'est pas monotone lorsqu'elle est tantôt croissante tantôt décroissante. Dans ce cas il faut préciser sur quelles parties elle est croissante ou décroissante.



Nous dirons que :
f est strictement décroissante sur $]-\infty;-2]$,
f est constante sur $[-2;-1]$,
f est strictement croissante sur $[-1;0]$,
f est strictement décroissante sur $[0;2]$,
f est strictement croissante sur $[2;3]$.

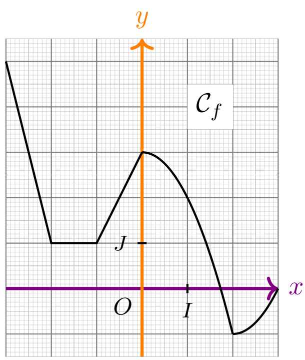
La courbe fait également apparaître des *sommets* (points haut ou bas de la courbe).

Nous dirons que, par exemple, *f admet un minimum (absolu) égale à -1 qui est atteint pour $x = 2$*.

Ou encore que *f admet un maximum local sur $[-2;3]$ qui est égale à 3 et qui est atteint en $x = 0$*.

4 ... pour finir par une schématisation.

Nous schématiserons la courbe représentative de la fonction par un *tableau de variation*.

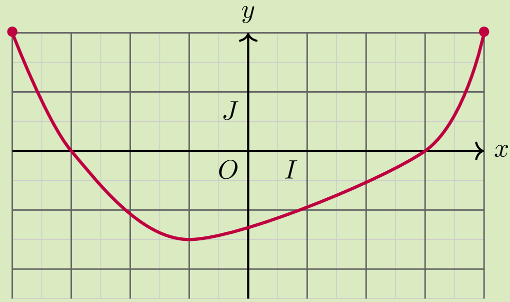


x	$-\infty$		-2		-1		0		2		3
f		↘	1	→	1	↗	3	↘	-1	↗	0

Exercice 2.

Compléter le tableau de variation proposé à partir de la représentation graphique ci-dessous.

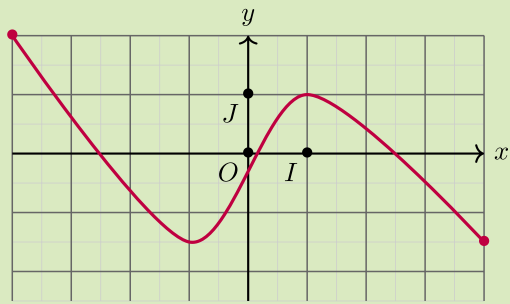
x	-4				4
f	2	$\searrow$		$\nearrow$	2



Exercice 3.

Compléter le tableau de variation proposé à partir de la représentation graphique ci-dessous.

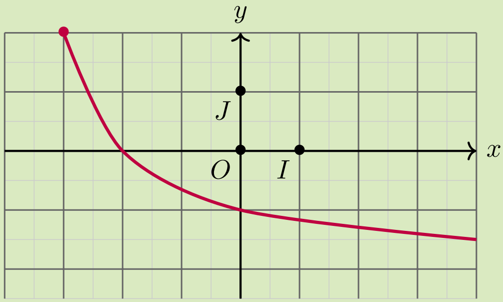
x	-4		$\dots$		$\dots$		$\dots$
f	$\dots$	$\searrow$	$\dots$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-1{,}5$



Exercice 4.

Compléter le tableau de variation proposé à partir de la représentation graphique ci-dessous.

x	-3	$\cdots$
f		



Exercice 5.

Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-4		-1		1		3		$3{,}5$
f			-2				0		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	-4				-5				-1

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

b) Indiquer le sens de variation de la fonction f.

c) Préciser les extrema éventuels de la fonction f et pour quelle(s) valeur(s) ils sont atteints.

d) Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.

Exercice 6.

x	-2		0		3		4
f	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	6

Comparer si possible les nombres suivants.

a) $f(-2)$ et $f(-1)$

b) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$

c) $f(-1)$ et $f(1)$

d) $f(3,6)$ et $f(3,7)$

e) $f\left(\frac{7}{2}\right)$ et $f(4)$

f) $f(1)$ et $f(3,5)$

Exercice 7.

Exercice 8.

On donne le tableau de variation d'une fonction f.

x	-5		0		1		2
f	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-1

Tracez une courbe pouvant représenter la fonction f.

Exercice 9.

On donne le tableau de variation d'une fonction g.

x	-4		-1		2		5
g	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

a) Quel est l'ensemble de définition de g ?

b) Décrivez par des phrases les variations de g.

c) Tracez dans un repère une courbe pouvant représenter g.

Exercice 10.

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-2;7]$. On sait :

- f est croissante sur $[-2;5]$ et sur $[6;7]$;
- f est décroissante sur $[5;6]$;
- $f(-2) = f(6) = -1$ et $f(5) = f(7) = 1$.

a) Construisez le tableau de variation de f.

b) Tracez dans un repère une courbe pouvant représenter f.

Exercice 11.

II Variation des fonctions affines.

Proposition 1

Soient :

. a et b deux nombres réels,

. f la fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$ quelque soient $x \in \mathbb{R}$

(i) Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(ii) Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

(iii) Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

La connaissance des variations de la fonction affine permet de retrouver les tableaux de signes en raisonnant à partir de la courbe représentative.

III Démonstrations pour les fonctions de référence.

La façon la plus simple de retenir les résultats de cette partie consiste à connaître par cœur les allures des courbes représentatives des fonctions de référence.

1 Carré.

Proposition 2

Tableau de variations de la fonction carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Exercice 12.

Dans chaque cas comparez les nombres A et B sans utiliser la calculatrice.

1. $A = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ et $B = \left(\frac{4}{3}\right)^2$,
2. $A = 1,001^2$ et $B = 1,0099^2$,
3. $A = -2,3^2$ et $B = (-2,3)^2$.

Exercice 13.

Encadrez x^2, puis $3x^2$, le plus précisément possible, dans les cas suivants :

1. $1 \leq x \leq 4$,
2. $-2 \leq x < -0,5$,
3. $-2 \leq x < 3$,
4. $-10 \leq x \leq 10$.

Exercice 14.

2 Inverse.

Proposition 3

Tableau de variations de la fonction inverse :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

3 Racine carrée.

Nous avons déjà remarqué qu'il n'est pas possible d'obtenir des identités remarquables, des égalités, liant la somme et la racine carré. Cependant nous pouvons obtenir une inégalité.

Lemme 1 Croissance de la racine carrée.

Soient :

. $a \in [0; +\infty[$,

. $b \in [0; +\infty[$.

Si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Proposition 4

Tableau de variations de la fonction racine carrée :

x	0		$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	$\nearrow$	

4 Cube.

Proposition 5

Tableau de variations de la fonction cube :

x	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$\nearrow$	

IV Exercices.

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.

Exercice 18.

Exercice 19.