31 Les ensembles en probabilité.

I Expérience aléatoire.

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat (ou *issue*) ne peut être connu à l'avance.

Comme pour toute expérience il faut définir un *dispositif expérimental*. Il s'agit de décrire l'expérience et les conditions dans lesquelles elle est réalisée ainsi que ce qu'il faut observer (issues).

II Généralités sur la modélisation.

1 Loi de probabilité.

Si on recommence un grand nombre (en théorie une infinité) de fois une expérience aléatoire la fréquence d'apparition d'une issue, ω, s'approche d'une valeur fixe qui est appelée *la probabilité de l'issue* et notée $\mathbb{P}(\omega)$.

Les probabilités de toutes les issues forment la *loi de probabilité* ou *distribution de probabilité*.

2 Événement.

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé *l'univers* et est noté Ω. La fréquence d'apparition de toutes les issues est de 1 donc : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Un événement est un sous-ensemble de *l'univers*.

Un événement A peut être présenté par :
— une propriété A :« Les issues telles que … »,
— un sous-ensemble : $A = \{\dots\}$.

Les événements $\varnothing$ et Ω sont respectivement appelés les événements *impossible* et *certain*.

Définition 1

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qu'il contient.

Exercice 1. ☯

On lance un dé pipé.
Le tableau suivant regroupe les probabilités.

F (face)	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(F)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	?

1. Calculer $\mathbb{P}(6)$.
2. Calculer la probabilité des événements suivants.
   (a) « La face obtenue est paire » ;
   (b) « la face obtenue est supérieur ou égale à 5 ».

3 Réunion et intersection d'événements.

L'événement $A \cup B$ (obtenu par la réunion des sous-ensembles A et B) contient les issues contenues dans A *ou* dans B.

L'événement $A \cap B$ (obtenu par l'intersection des sous-ensembles A et B) contient les issues contenues dans A *et* dans B (simultanément).

Proposition 1

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

4 Événement contraire.

Étant donné un événement E, *l'événement contraire* de E, noté $\overline{E}$, est formé de toutes les issues qui ne sont pas dans E.

Proposition 2

Soit A un événement d'un univers Ω.

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Exercice 2.

Démontrez que $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

Des événements A et B sont dits *incompatibles* si et seulement si $A \cap B = \varnothing$. Remarquons que si A et B sont incompatibles alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exercice 3.

Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone. On considère les événements :

- O_1 : « La 1$^{\text{er}}$ ligne est occupée ».
- O_2 : « La 2$^{\text{e}}$ ligne est occupée ».

Une étude statistique montre que :

- $p(O_1) = 0,4$
- $p(O_2) = 0,3$
- $p(O_1 \cap O_2) = 0,2$

Calculer la probabilité des événements suivants.

1. « La ligne 1 est libre ».
2. « Au moins une des lignes est occupée ».
3. « Au moins une des lignes est libre ».

III Exercices.

Exercice 4.

On dispose d'un dodécaèdre régulier à 12 faces dont les faces sont numérotées de 1 à 12. lorsqu'on le lance il retombe sur une des faces dont on note le numéro. On note A l'événement « obtenir un numéro pair » et B l'événement « obtenir un multiple de 3 ». pour chacun des événements suivants listez les issues qui les constituent.

a) A.

b) B.

c) $\overline{B}$.

d) $A \cap B$.

e) $A \cup B$.

f) $\overline{A} \cup B$.

Exercice 5.

Une entreprise fabrique des pièces de carrosserie automobile. Ces pièces peuvent présenter deux sortes de défauts : défaut d'usinage ou défaut de peinture. On note A l'événement « la pièce a un défaut d'usinage » et B l'événement « la pièce à un défaut de peinture ». À la sortie de la fabrication, on choisit une pièce au hasard.

1. Pour chacun des événements suivant dites s'il correspond à $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ ou $\overline{A} \cap \overline{B}$.
   - E : « la pièce a deux défauts ».
   - F : « la pièce a au moins un des deux défauts ».
   - G : « la pièce n'a aucun défaut ».
   - H : « la pièce a au plus un défaut ».
2. Parmi les événements E, G et H, lequel est l'événement contraire de F ?
3. Parmi les événements F, G et H lequel est l'événement contraire de E ?