

31 Les ensembles en probabilité.

I Expérience aléatoire.

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat (ou *issue*) ne peut être connu à l'avance.

Comme pour toute expérience il faut définir un *dispositif expérimental*. Il s'agit de décrire l'expérience et les conditions dans lesquelles elle est réalisée ainsi que ce qu'il faut observer (issues).

II Généralités sur la modélisation.

1 Loi de probabilité.

Si on recommence un grand nombre (en théorie une infinité) de fois une expérience aléatoire la fréquence d'apparition d'une issue, ω , s'approche d'une valeur fixe qui est appelée *la probabilité de l'issue* et notée $\mathbb{P}(\omega)$.

Les probabilités de toutes les issues forment la *loi de probabilité* ou *distribution de probabilité*.

2 Événement.

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé *l'univers* et est noté Ω . La fréquence d'apparition de toutes les issues est de 1 donc : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Un événement est un sous-ensemble de *l'univers*.

Un événement A peut être présenté par :

- une propriété A : « Les issues telles que ... »,
- un sous-ensemble : $A = \{ \dots \}$.

Les événements \emptyset et Ω sont respectivement appelés les événements *impossible* et *certain*.

Définition 1

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qu'il contient.

Exercice 1. 🌀

On lance un dé pipé.

Le tableau suivant regroupe les probabilités.

F (face)	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(F)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	?

- Calculer $\mathbb{P}(6)$.
- Calculer la probabilité des événements suivants.
 - « La face obtenue est paire » ;
 - « la face obtenue est supérieur ou égale à 5 ».

3 Réunion et intersection d'événements.

L'événement $A \cup B$ (obtenu par la réunion des sous-ensembles A et B) contient les issues contenues dans A *ou* dans B .

L'événement $A \cap B$ (obtenu par l'intersection des sous-ensembles A et B) contient les issues contenues dans A *et* dans B (simultanément).

Proposition 1

Soient A et B deux événements d'un univers Ω .

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

4 Événement contraire.

Étant donné un événement E , *l'événement contraire* de E , noté \overline{E} , est formé de toutes les issues qui ne sont pas dans E .

Proposition 2

Soit A un événement d'un univers Ω .

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Exercice 2.

Démontrez que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Des événements A et B sont dits *incompatibles* si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
Remarquons que si A et B sont incompatibles alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exercice 3.

Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone. On considère les événements :

- O_1 : « La 1^{er} ligne est occupée ».
- O_2 : « La 2^e ligne est occupée ».

Une étude statistique montre que :

- $p(O_1) = 0,4$
- $p(O_2) = 0,3$
- $p(O_1 \cap O_2) = 0,2$

Calculer la probabilité des événements suivants.

1. « La ligne 1 est libre ».
2. « Au moins une des lignes est occupée ».
3. « Au moins une des lignes est libre ».

5 Exercices.

Exercice 4.

On dispose d'un dodécaèdre régulier à 12 faces dont les faces sont numérotées de 1 à 12. lorsqu'on le lance il retombe sur une des faces dont on note le numéro. On note A l'événement « obtenir un numéro pair » et B l'événement « obtenir un multiple de 3 ». pour chacun des événements suivants listez les issues qui les constituent.

- | | | |
|-----------------|-----------------|----------------------------|
| a) A . | b) B . | c) \overline{B} . |
| d) $A \cap B$. | e) $A \cup B$. | f) $\overline{A} \cup B$. |

Exercice 5.

Une entreprise fabrique des pièces de carrosserie automobile. Ces pièces peuvent présenter deux sortes de défauts : défaut d'usinage ou défaut de peinture. On note A l'événement « la pièce a un défaut d'usinage » et B l'événement « la pièce à un défaut de peinture ». À la sortie de la fabrication, on choisit une pièce au hasard.

1. Pour chacun des événements suivant dites s'il correspond à $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A \cup B}$ ou $\overline{A \cap B}$.
 - E : « la pièce a deux défauts ».
 - F : « la pièce a au moins un des deux défauts ».
 - G : « la pièce n'a aucun défaut ».
 - H : « la pièce a au plus un défaut ».
2. Parmi les événements E , G et H , lequel est l'événement contraire de F ?
3. Parmi les événements F , G et H lequel est l'événement contraire de E ?