

## 30 Inéquation produit ou quotient nul.

Nous savons depuis le collège résoudre des équations du premier degré et sinon nous essayons d'utiliser des équations produit-nul.

Nous allons avoir sensiblement la même démarche pour les inéquations.

### Exercice 1.

Essayez de résoudre, dans l'ensemble des réels, les inéquations d'inconnue  $x$ .

$$(E_1) \quad -3x + 1 < 0$$

$$(E_2) \quad 2(x - 3)(-7x + 14) > 0$$

### 1 Étude du signe d'une fonction factorisée.

Pour étudier le signe d'une fonction factorisée il faut étudier le signe de chaque facteur en regroupant les résultats dans un unique tableau de signe. ♥

### Exercice 2.

Étudiez le signe de la fonction  $f$  définie sur  $[-10; 10]$  par, pour tout  $x \in [-10; 10]$

$$f(x) = (3x - 7)x^2(-x + 1)$$

### Exercice 3.

Étudiez le signe de  $g : \begin{cases} [-6; 4] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto (x + 4)(-x + 2) \end{cases}$

### 2 Inéquation produit-nul.

Résoudre une inéquation produit-nul revient à étudier le signe de la fonction associée.

### Exercice 4.

Résolvez l'inéquation  $-2(x + 1)(-7 - x) \geq 0$  dans  $\mathbb{R}$ .

## Exercice 5.

1.  $(x - 5)(-2x + 6) \geq 0$

2.  $(3x - 5)(x + 4) > 0$

3.  $(x + 3)(-x + 6) \leq 0$

4.  $(-x + 4)(3x + 2) > 0$

5.  $(10x + 5)(-3x + 4) > 0$

6.  $(x - 4)(3 - x) \leq 0$

7.  $(-2x + 3)(5 + x) > 0$

8.  $3x(3x - 5) < 0$

9.  $-(x + 1)^2(2x - 1) \geq 0$

10.  $-2x(x - 1)(4 - x) \leq 0$

11.  $x^2(4 - x)(-2x + 1) > 0$

12.  $x^3(x + 1) < 0$

13.  $(x^2 + 1)(x - 1) \geq 0$

14.  $(x - 2)(4 - x) < 0$

15.  $\left(\frac{3}{4} - x\right)\left(x - \frac{7}{6}\right) \geq 0$

16.  $(x + \sqrt{3})(x - 4) \geq 0$

17.  $(3x - 7)(7 - 3x) \leq 0$

**3 Inéquation se ramenant à une inéquation produit-nul.**

## Exercice 6.

Justifiez que les inéquations suivantes sont équivalentes

$$(2x - 4)(x + 5) + x > -5 \text{ et } (2x - 3)(x + 5) > 0$$

puis résolvez l'inéquation  $(2x - 4)(x + 5) + x > -5$ .

## Exercice 7.

Résolvez dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $x^2 \leq 16$ .

## Exercice 8.

Résolvez les inéquation suivantes dans l'ensemble des réels.

- |                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| 1. $x^2 - 4x \leq -2x - 1$          | 11. $x^2 \leq -16$   |
| 2. $3x(x + 3) - (x + 3)^2 \leq 0$   | 12. $x^2 \leq 0$   |
| 3. $x^3 + 2x^2 + x \geq 0$          | 13. $x^2 < 8$  |
| 4. $x(x + 6) > 3(x + 6)$            | 14. $x^2 \leq 144$   |
| 5. $2x(x - 3) + 3x - 9 < 6x - 18$   | 15. $x^2 \leq 20$  |
| 6. $x^2(1 - 3x) + 4(6x - 2) \geq 0$ | 16. $x^2 - 4 + (x + 2)(2x + 5) < 0$                            |
| 7. $(1 - 2x)x - 4x(x + 6) \leq 0$   | 17. $(x + 1)(x - 3) \geq x^2 - 9$                              |
| 8. $7 - x^2 < 2x - 2\sqrt{7}$       | 18. $4x - 4 + (x - 1)(x - 4) + x^2 - 1 > 0$                    |
| 9. $(x^2 - 1) + 2x - 2 > 6x - 6$    | 19. $(x + 5)^2 \leq (x + 5)(x + 3)$                            |
| 10. $x^2 \leq 10$                   | 20. $(2x - 1)(x + 3) \geq \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 6)$ |

## 4 Inéquation quotient.

Pour étudier le signe d'un quotient nous étudions le signe du numérateur puis du dénominateur et nous utilisons la même règle que pour le signe d'un produit. Il faut cependant rester vigilant et exclure les valeurs interdites.

## Exercice 9.

Résolvez l'inéquation  $\frac{-x + 1}{-2x + 8} > 0$ .

## Exercice 10.

Résolvez les inéquations dans  $\mathbb{R}$ .

1.  $\frac{2x - 4}{x + 2} \leq 0$
2.  $\frac{-2x + 8}{3x - 2} \leq 0$
3.  $\frac{2x + 4}{x - 1} - 2 \geq 0$
4.  $\frac{2x + 4}{x + 1} < 3$
5.  $\frac{2x + 3}{x + 1} \leq \frac{x - 6}{x + 1}$
6.  $1 < \frac{2x + 10}{-x + 3}$
7.  $\frac{x + 3}{2x - 1} \geq 0$
8.  $\frac{2 - x}{5 - 2x} \leq 0$
9.  $\frac{3x - 1}{-x + 5} > 0$
10.  $\frac{5x(x - 2)}{4x + 1} < 0$
11.  $\frac{2x^2}{(-x + 1)(x + 3)} \geq 0$
12.  $\frac{-x(x - 4)}{2 + x^2} \leq 0$
13.  $\frac{(x + 1)(x - 2)}{3 - x} > 0$
14.  $\frac{9 - 4x}{11 - 5x} < 0$
15.  $\frac{-5 + 4x}{2x - 1} \geq 0$
16.  $\frac{x + 1}{3 - x} \leq 0$
17.  $\frac{7 - 2x}{2x - 1} > 0$
18.  $\frac{-5x}{(2x - 7)^2} < 0$
19.  $\frac{1 + 2x^2}{7 - x} \geq 0$
20.  $\frac{x + 4}{5 - x} < 2$

