28 Colinéarité de deux vecteurs.

I Colinéarité.

Définition 1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* si et seulement si il existe un nombre réel λ (*i.e.* on peut en trouver au moins un) tel que

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda\vec{u}$$

II Caractérisation.

Proposition 1

Soient :

. $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base du plan,

. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs dont les coordonnées relativement à la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, sont respectivement $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils vérifient l'une au moins des propriétés suivantes.

(i) Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles.

(ii) Il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

(iii) $x_u y_v - x_v y_u = 0$.

Exercice 1.

Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

Donnez deux vecteurs colinéaires à $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}$.

Calculez le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 4.

Déterminez si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\21\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\21\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}7/4\\2/7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1/2\\4\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}2/3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1/5\\3/5\end{pmatrix}$.

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix}$.

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}3/2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}21\\28\end{pmatrix}$.

Exercice 5.

Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si c'est le cas précisez l'égalité les reliant.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-9\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}$.

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\-\frac{5}{6}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\-15\end{pmatrix}$.

g) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\\sqrt{5}+1\end{pmatrix}$.

Exercice 6.

Déterminez un réel μ de sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\mu\\2\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\\mu\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1/3\end{pmatrix}$. o

Exercice 7.

Soient $A(-10;7)$, $B(-20;10)$, $C(5;-2)$ et $D(10;-8)$ des points du plan.

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 8.

Soient les points $C(0;4)$, $D(2;7)$, $E(8;17)$ et $F(16;29)$.

1. Montrez que $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
2. $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 9.

On considère des points $F(6;4)$ et G d'abscisse 8 des points. Sachant que $\overrightarrow{FG}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ déterminez l'ordonnée de G.

III Parallélisme.

Proposition 2

Soient A, B, C et D des points du plan avec $A \neq B$ et $C \neq D$.

$(AB)//(CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 10.

Soient $A(-4;-3)$, $B(8;1)$, $C(4,4)$ et $D(-2;2)$ des points du plan.
Étudiez la position relative de (AB) et (CD).

Exercice 11.

Déterminez la position relative des droites (AB) et (MN).

a) $A(1;2)$, $B(5;8)$, $M(0;-1)$ et $N(5;6)$.

b) $A(3;-10)$, $B(15;5)$, $M(1;1)$ et $N(17;21)$.

IV Alignement de trois points.

Corollaire 1

Soient A, B et C des points du plan.

A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 12.

Soient $A(-2;3)$, $B(2;1)$ et $C(4;0)$ dans un repère du plan muni d'un repère $(O:\vec{i},\vec{j})$.
Démontrez que A, B et C sont alignés.

Exercice 13.

Déterminez si les points A, B et C sont alignés.

a) $A(2;13)$, $B(-2;-7)$ et $C(11;58)$. b) $A(9;20)$, $B(2;-1)$ et $C(25;71)$.

Il est possible de reformuler le précédent résultat : dire que trois points sont alignés, c'est dire que l'un d'entre eux appartient à la droite passant par les deux autres.

Corollaire 2

Soients A, B et M des points du plan.

M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Exercice 14.

Déterminez si le point M appartient à la droite (EF).

a) $E(5;-3)$, $F(-3;3)$ et $M(15;-9)$. b) $E(0;-7)$, $F(1;0)$, $M(2;7)$.

V Exercices.

Exercice 15.

Déterminez tous les nombres x tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\10\end{pmatrix}$.
1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1+x\\2x\end{pmatrix}$.

Exercice 16.

On considère les points $E(5;-1)$, $F(-1;4)$, $G(7;2)$ et $M(1;y)$ où y est un nombre réel.

1. Pour quelle valeur de y le point m appartient-il à (FG) ?
2. Pour quelles valeurs de y les droites (EF) et (GM) sont-elles parallèles ?

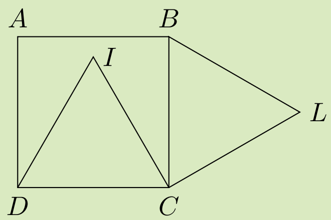
Exercice 17.

Soient $A(4;0)$, $B(0;7)$ et $C(-6;-5)$ des points.

1. Calculez les coordonnées du milieu P de $[AB]$.
2. Calculez les coordonnées des points S et T définis par $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $5\overrightarrow{CT} = 4\overrightarrow{CA}$.
3. Le point P est-il sur la droite (ST) ?

Exercice 18.

Soient $ABCD$ un carré, BCL et DIC des triangles équilatéraux tels que sur la figure ci-contre.
Nous souhaitons établir l'alignement des points A, I et L.
Pour cela considérons le repère orthonormé $(D;C;A)$.



1. Donnez sans justification les coordonnées de D, C, A et B.
2. Déterminez les coordonnées de I et L.
3. Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$.
4. Démontrez l'alignement des points A, I et L.

Exercice 19.

Soient $M(7;3)$, $N(-3;1)$, $C(0;5)$ et $E(3;9)$ des points du plan.

1. Montrez que le quadrilatère $MNCD$ est un trapèze.
2. Montrez que E est le point d'intersection de (NC) et (MD).
3. Soient J et K les milieux respectivement de $[NM]$ et $[CD]$. Calculez les coordonnées de J et K.
4. Montrez que E, J et K sont alignés.

Exercice 20.

Soient $A(3;4)$, $B(1;1)$, $C(6;-2)$ et $D(8;1)$ des points, I le milieu de $[BC]$, et E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}.$$

1. Calculez les coordonnées de I, E et F.
2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont-ils colinéaires ?
   (b) Qu'en déduisez-vous concernant les droites (BE) et (IF) ?
3. Montrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
4. (a) Calculez la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   (b) $ABCD$est -il un rectangle ?
5. Les points I, F et D sont-ils alignés ?

Exercice 21.

Soit $ABCD$ un trapèze tel que $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
Les points I et Jsont les milieux de $[AC]$ et de $[BD]$. On se propose de montrer que $(AB) \parallel (IJ)$.

1. Complétez : $\overrightarrow{IJ} = \cdots + \overrightarrow{AB} + \ldots$ et $\overrightarrow{IJ} = \cdots + \overrightarrow{CD} + \ldots.$
2. Déduisez-en : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$.
3. Trouvez k tel que $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{AB}$ et concluez.