

22 Manipuler des inégalités.

I Les règles de manipulation.

II Variation d'une fonction affine.

III Signe d'une fonction affine.

IV Somme d'inégalités.

V Exercices.

Exercice 1. C

Résolvez les inéquations.

a) $-3x + 7 < x + 2$

b) $-5x - 2 \leq 0$

c) $-x > 9$

d) $-x + 5 \leq 7 - 6x$

e) $2(3 - x) \geq 8$

f) $2x - 7 < (3x - 4) - x$

g) $3x - (4 + 3x) > 2$

h) $(2x - 1)(2x + 3) \leq (2x + 4)^2$

i) $(x - 1)(3 - x) > 7.$

Correction de l'exercice 1

a)

$$\begin{aligned}
 -3x + 7 < x + 2 &\Leftrightarrow -3x + 7 - x < x + 2 - x \\
 &\Leftrightarrow -4x + 7 < 2 \\
 &\Leftrightarrow -4x + 7 - 7 < 2 - 7 \\
 &\Leftrightarrow -4x < -5 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-4x}{-4} > \frac{-5}{-4} \\
 &\Leftrightarrow x > \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]\frac{5}{4}; +\infty[.$

b)

$$\begin{aligned}
 -5x - 2 \leq 0 &\Leftrightarrow -5x - 2 + 2 \leq 0 + 2 \\
 &\Leftrightarrow -5x \leq 2 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-5x}{-5} \geq \frac{2}{-5} \\
 &\Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left[-\frac{2}{5}; +\infty\right[$.

c)

$$\begin{aligned}
 -x > 9 &\Leftrightarrow \frac{-x}{-1} < \frac{9}{-1} \\
 &\Leftrightarrow x < -9
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; -9[$.

d) $S =]-\infty, \frac{2}{5}]$.

e) $S =]-\infty, -1]$.

f)

$$\begin{aligned}
 2x - 7 < (3x - 4) - x &\Leftrightarrow 2x - 7 < 3x - 4 - x \\
 &\Leftrightarrow 2x - 7 < 2x - 4 \\
 &\Leftrightarrow 2x - 7 - 2x < 2x - 4 - 2x \\
 &\Leftrightarrow -7 < -4
 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours vraie, quelque soit la valeur choisie pour x . Donc :

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \mathbb{R}$.

g)

$$\begin{aligned}
 3x - (4 + 3x) > 2 &\Leftrightarrow 3x - 4 - 3x > 2 \\
 &\Leftrightarrow -4 > 2
 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours fausse, quelque soit la valeur choisie pour x .
Donc :

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \emptyset$.

h)

$$\Leftrightarrow 3x - 3 \leq 16x + 16$$

$$\Leftrightarrow -19 \leq 13x$$

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{19}{13}; +\infty[.$$

i)

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 10 > 0$$

 $\mathcal{S} = ?.$

Exercice 2. E

Trouvez tous les nombres x qui vérifient les deux inéquations (système de deux équations à une inconnue) dans chaque cas :

$$\text{a) } \begin{cases} x + 7 \leq 12 \\ x - 5 \geq -17 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \leq 10 + x \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - 8 \geq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$$

Correction de l'exercice 2

- L'ensemble des solutions de $2x - 8 \leq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 = [-7; +\infty[.$
L'ensemble des solutions de $4x - 23 \leq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 =]-\infty; 11].$
L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [-7; +\infty[\cap]-\infty; 11] = [-7; 11].$
- L'ensemble des solutions de $2x - 8 \geq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 =]-\infty; -7].$
L'ensemble des solutions de $4x - 23 \geq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 = [11; +\infty[.$
L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 =]-\infty; -7] \cap [11; +\infty[= \emptyset.$
- L'ensemble des solutions de $2x - 8 \leq 5x + 13$ est $\mathcal{S}_1 = [-7; +\infty[.$
L'ensemble des solutions de $4x - 23 \geq 10 + x$ est $\mathcal{S}_2 = [11; +\infty[.$
L'ensemble des solutions du système d'inéquation est $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [-7; +\infty[\cap [11; +\infty[= [11; +\infty[.$

Exercice 3. C

Précisez les variations de f définie sur l'intervalle I dans les différents cas proposés puis donnez son tableau de signe.

1. $f(x) = 2x + 4, I = \mathbb{R}.$

9. $f(x) = 3x + 7, I = \mathbb{R}.$

2. $f(x) = 5x - 15, I = \mathbb{R}.$

10. $f(x) = 5x - 4, I = \mathbb{R}.$

3. $f(x) = -7x + 14, I = \mathbb{R}.$

11. $f(x) = -4x + 13, I = \mathbb{R}.$

4. $f(x) = -13x - 39, I = \mathbb{R}.$

12. $f(x) = -3x - 4, I = \mathbb{R}.$

5. $f(x) = x + 7, I = \mathbb{R}.$

13. $f(x) = 5x + 12, I =] - \infty; -3[.$

6. $f(x) = x - \pi, I = \mathbb{R}.$

14. $f(x) = 6x - 8, I = [-12; 10].$

7. $f(x) = -x + \sqrt{2}, I = \mathbb{R}.$

15. $f(x) = -8x + 12, I = \left[\frac{3}{2}; +\infty[.$

8. $f(x) = -x - 2, I = \mathbb{R}.$

16. $f(x) = -3x - 24, I =] - 8; 10[.$

Correction de l'exercice 3

1.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

2.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

3.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

4.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

5.

x	$-\infty$	-7	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

6.

x	$-\infty$	π	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

7.

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

8.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

9.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

10.

x	$-\infty$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

11.

22 Manipuler des inégalités.

x	$-\infty$	$\frac{13}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

12.

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

13.

x	$-\infty$	-3	$-\frac{12}{5}$
$f(x)$	-	0	+

14.

x	-12	$\frac{4}{3}$	10
$f(x)$	-	0	+

15.

x	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	0	-

16.

x	-8	10	
$f(x)$		-	

Exercice 4. D

- Résolvez l'équation $8x - 4 = 0$.
 - Résolvez l'inéquation $8x - 4 \geq 0$.
- Parfois on ne précise pas l'ensemble de définition d'une fonction g . Dans ce cas l'ensemble des définition est l'ensemble des nombres x pour lesquels $g(x)$ existe.

Déduisez de la question 1 les ensembles de définition des fonctions suivantes.

- $g : x \mapsto \frac{1}{8x - 4}$.
- $h : x \mapsto \sqrt{8x + 4}$.

Correction de l'exercice 4

- $x = \frac{1}{2}$.
 - $[\frac{1}{2}, +\infty[$.
- $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
 - $\mathcal{D}_h = [\frac{1}{2}, +\infty[$.

Exercice 5. D

Un particulier a des marchandises à faire transporter. Un premier transporteur lui demande 460 € au départ et 3,50 € par kilomètre. Un second transporteur lui demande 1000 € au départ et 2 euro par kilomètre.

Pour quelles distances à parcourir est-il plus avantageux de s'adresser au second transporteur ?

Correction de l'exercice 5

$$3,5x + 460 \geq 2x + 1000 \Leftrightarrow x \geq \frac{1000-460}{1,5} \Leftrightarrow x \geq 460$$

Exercice 6. D

Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 750 € par jour et les frais de fabrication s'élèvent à 3,75 € par livre.

Combien faut-il imprimer de livre par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 6 €.

Correction de l'exercice 6

$$3,75x + 750 \leq 6x \Leftrightarrow \frac{750}{6-3,75} \leq x \Leftrightarrow \frac{1000}{3} \leq x.$$