22 Manipuler des inégalités.

I Les règles de manipulation.

Théorème 1

(*i*) On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en ajoutant ou en soustrayant le même nombre à chaque membre de celle-ci.

(*ii*) On ne modifie pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en multipliant ou en divisant par un même nombre strictement positif chaque membre de celle-ci.

(*iii*) Pour ne pas modifier l'ensemble des solutions d'une inéquation en multipliant ou en divisant par un même nombre strictement négatif des deux côtés de l'inégalité il faut changer le sens de l'inégalité.

Remarques.

1. Ce sont les même règles que pour les équations hormis le cas de la multiplication (ou division) par un nombre strictement négatif.
2. Nous pourrons donc résoudre les inéquations du premier degré comme nous le faisions pour les équations du premier degré en isolant l'inconnue.

Exemples.

1.
$$x - 7 \geq 12$$
équivaut successivement à
$$\begin{aligned} x - 7 + 7 &\leqslant 12 + 7 \\ x &\leqslant 19 \\ x &\in]-\infty; 19] \end{aligned}$$
2. $3x \leq 12$.
3. $-4x \geq 32$.

II Variation d'une fonction affine.

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 3x - 8$. Quel nombre est le plus grand $f(2)$ ou $f(-7)$? Peut-on le deviner sans calculer $f(2)$ et $f(-7)$.

Proposition 1

Soient :

. a et b deux nombres réels,

. f la fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$ quelque soient $x \in \mathbb{R}$

(i) Lorsque $a > 0$, alors les images de deux nombres par f sont rangées dans le même ordre. Autrement dit si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$.

(ii) Si $a < 0$ alors alors les images de deux nombres par f sont rangées dans l'ordre contraire. Autrement dit si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.

Démonstration

Si $a = 0$ la fonction est évidemment constante.

Démontrons l'un des deux cas l'autre se traitant de la même façon. Supposons par exemple que $a < 0$.

Il faut démontrer que f est strictement décroissante. D'après la définition de la monotonie, il faut donc montrer que quels que soient les nombres réels α et β si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$.

Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha < \beta$. Cette inégalité est successivement équivalente à :

$$\begin{aligned} a\alpha &> ax\beta \text{ car } a < 0 \\ a\alpha + b &> a\beta + b \\ f(\alpha) &> f(\beta) \end{aligned}$$

On a donc démontrer que si $\alpha < \beta$ alors $f(\alpha) > f(\beta)$. Autrement dit f est strictement décroissante.

■

Si $a > 0$ la fonction affine est dite *strictement croissante* et *strictement décroissante* lorsque $a < 0$.

Remarques.

1. Nous reviendrons sur cette idée en la généralisant à d'autre fonction en parlant de monotonie.

Exemples.

1. Étudions les variations de la fonction h, définie par $h(x) = -12x + 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   h est une fonction affine avec $a = -12$ et $b = 3$. Comme $a < 0$, h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

III Signe d'une fonction affine.

Les outils que nous venons d'introduire vont nous permettre de faire une étude générale du signe d'une fonction affine.
Étudier le signe d'une fonction c'est-à-dire, suivant les valeurs de x si $f(x)$ est positif ou négatif.

Exemples.

Soit $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -7x + 49 \end{array} \right.$

* On cherche les valeurs de x telles que

$$h(x) > 0$$

Cette inéquation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} -7x + 49 &> 0 \\ -7x + 49 - 40 &> 0 - 49 \\ -7x &> -49 \\ \frac{-7x}{-7} &< \frac{-49}{-7} \\ x &< 7 \\ x &\in]-\infty; 7[\end{aligned}$$

* En procédant comme précédemment nous obtiendrions que l'ensemble des solutions de l'équation $h(x) = 0$ est $\{7\}$.
* Des deux points précédents nous déduisons que $h(x) < 0$ lorsque $x \in]7; +\infty[$.

Nous résumerons cette étude sous forme d'un tableau :

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

Proposition 2 - Signe des fonctions affines.

Soient :

. a et b deux nombres réels,

. $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$, alors :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

Démonstration

Supposons $a > 0$ et démontrons qu'alors le tableau de signe proposé convient.

Recherchons pour quelles valeurs de x, $f(x) > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff ax + b > 0 \\ &\iff ax + b - b > 0 - b \\ &\iff ax > -b \end{aligned}$$

Et comme $a > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff \frac{ax}{a} > -\frac{b}{a} \\ &\iff x > -\frac{b}{a} \\ &\iff x \in \left]-\frac{b}{a} ; +\infty\right[\end{aligned}$$

Recherchons de même pour quelles valeurs de x, $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff ax + b = 0 \\ &\iff x = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

■

Remarques.

1. De même si $a < 0$ alors le tableau de signe est

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

2. Si $a = 0$ alors f est la fonction constante égale à b donc elle est toujours du même signe, celui de b.
3. Ces deux situations correspondent soit au cas d'une droite qui monte soit au cas d'une droite qui descend.

Exemples.

1. Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x + 8$.
   f est une fonction affine avec $a = 2$ et $b = 8$.
   $a > 0$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{2} = -4$ donc, d'après le cours,

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
f		$-$	0	$+$	

2. Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto -4x + 10$.
   g est une fonction affine avec $a = -4$ et $b = 10$.
   $a < 0$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{10}{-4} = \frac{5}{2}$ donc

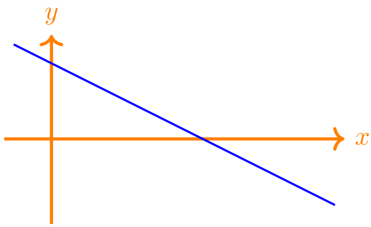
x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
g		$+$	0	$-$	

La connaissance des variations de la fonction affine permet de retrouver les tableaux de signes en raisonnant à partir de la courbe représentative.

Exemples.

Étudions par exemple le signe de $f : x \mapsto -2x + 4$.

* f est une fonction affine avec $a = -2$ et $b = 4$.
* le coefficient directeur est strictement négatif, $a < 0$ donc f est strictement décroissante.
  Ceci se traduit graphiquement par une droite qui descend. Quelque chose comme :



Nous voyons sur ce schéma que la fonction prend d'abord des valeurs positives puis des valeurs négatives. Autrement dit nous pouvons déjà compléter le tableau de signe de la façon suivante :

x	$-\infty$		$?$		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

Il nous reste à trouver pour quelle valeur de x, f s'annule.

* f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{-2} = 2$. Ce résultat a été établi plus tôt dans cette leçon.

  Nous en déduisons le tableau de signe de f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	

IV Somme d'inégalités.

Il est possible d'ajouter des égalités membre à membre. On peut également ajouter des inégalités si elles sont dans le même sens.

Proposition 3

Soient a, b, u et v des réels.

Si $\left\{ \begin{array}{l} a \leqslant b \\ u \leqslant v \end{array} \right.$, alors $a + u \leqslant b + v$.

Démonstration

La somme de deux nombres positifs est un nombre positif donc $(b-a)+(v-u) \geqslant 0$.

D'où : $b + v \geqslant a + u$.

■

V Exercices.

Exercice 1. C

Résolvez les inéquations.

a) $-3x + 7 < x + 2$

b) $-5x - 2 \leq 0$

c) $-x > 9$

d) $-x + 5 \leqslant 7 - 6x$

e) $2(3 - x) \geqslant 8$

f) $2x - 7 < (3x - 4) - x$

g) $3x - (4 + 3x) > 2$

h) $(2x - 1)(2x + 3) \leqslant (2x + 4)^2$

i) $(x - 1)(3 - x) > 7$.

Exercice 2. E

Trouvez tous les nombres x qui vérifient les deux inéquations (système de deux équations à une inconnue) dans chaque cas :

a) $\begin{cases} x + 7 \leq 12 \\ x - 5 \geq -17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \leq 10 + x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 8 \geq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 8 \leq 5x + 13 \\ 4x - 23 \geq 10 + x \end{cases}$

Exercice 3. C

Précisez les variations de f définie sur l'intervalle I dans les différents cas proposés puis donnez son tableau de signe.

1. $f(x) = 2x + 4$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 5x - 15$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = -7x + 14$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = -13x - 39$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = x - \pi$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = -x - 2$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = 3x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = 5x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = -4x + 13$, $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = -3x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = 5x + 12$, $I =]-\infty; -3[$.
14. $f(x) = 6x - 8$, $I = [-12; 10]$.
15. $f(x) = -8x + 12$, $I = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
16. $f(x) = -3x - 24$, $I =]-8; 10[$.

Exercice 4. D

1. (a) Résolvez l'équation $8x - 4 = 0$.
   (b) Résolvez l'inéquation $8x - 4 \geqslant 0$.
2. Parfois on ne précise pas l'ensemble de définition d'une fonction g. Dans ce cas l'ensemble des définition est l'ensemble des nombres x pour lesquels $g(x)$ existe.
   Déduisez de la question 1 les ensembles de définition des fonctions suivantes.
   (a) $g : x \mapsto \dfrac{1}{8x - 4}$.
   (b) $h : x \mapsto \sqrt{8x + 4}$.

Exercice 5. D

Un particulier a des marchandises à faire transporter. Un premier transporteur lui demande 460 € au départ et $3,50$ € par kilomètre. Un second transporteur lui demande 1000 € au départ et 2 euro par kilomètre.
Pour quelles distances à parcourir est-il plus avantageux de s'adresser au second transporteur ?

Exercice 6. D

Une société veut imprimer des livres. La location de la machine revient à 750 € par jour et les frais de fabrication s'élèvent à $3,75$ € par livre.
Combien faut-il imprimer de livre par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 6 €.