

19 Identités remarquables.

Une identité est une égalité qui est toujours vraie (contrairement par exemple à une équation).

I Les identités à connaître par cœur.

Proposition 1

Pour tous nombres a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Démonstration

Soient a et b des nombres réels (sous-entendu quelconque).

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b) \times (a + b) \\ &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

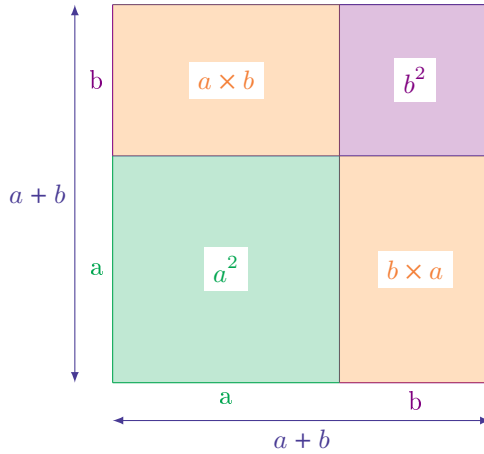


Exemples.

1. Utilisation pour trouver une forme développée réduite et ordonnée d'un polynôme : $(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$.
2. Utilisation pour factoriser : $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2$.

Remarques.

1. Une interprétation géométrique de cette identité avec des aires de rectangles.



L'aire du grand carré $(a + b)^2$ est obtenue comme la somme des aires des deux petits carrés a^2 et b^2 ainsi que de celle des rectangles $a \times b$ et $b \times a$.

Proposition 2

Pour tous nombres a et b :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Démonstration

Soient a et b des nombres réels (sous-entendu quelconque).

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= (a - b) \times (a - b) \\ &= a \times a + a \times (-b) + (-b) \times a + (-b) \times (-b) \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$\text{Pour tous } a, b \in \mathbb{R}, (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$



Proposition 3

Pour tous nombres a et b :

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Démonstration

Soient a et b des réels.

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a \times a + a \times (-b) + b \times a + b \times (-b) \\ &= a^2 - ab + ab + b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

$$\text{Pour tous } a, b \in \mathbb{R}, (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$



II Exercices.

Exercice 1. C

Développez les expressions polynomiales suivantes.

a) $A(x) = (x + 6)^2$.

b) $B(x) = (x - 11)^2$.

c) $C(x) = (x + 3^2)(x - 3^2)$.

d) $D(x) = (2x - 3)^2$.

e) $E(x) = (-7x + 3)^2$.

f) $F(x) = (3x - 6)(3x + 6)$.

g) $G(x) = x(5x - 7)^2$.

Exercice 2. C

Factorisez les expressions polynomiales suivantes.

a) $A(x) = x^2 + 6x + 9$.

b) $B(x) = 49x^2 - 14x + 1$.

c) $C(x) = x^2 + 2x + 1$.

d) $D(x) = x^2 - 8$.

e) $E(x) = x^4 - 49$.

Exercice 3. D

Résolvez les équations.

a) $x^2 = 81$.

b) $9x^2 - 42x + 49 = 0$.

c) $x^2 + 4 = 0$.

d) $x^4 - 16 = 0$.

e) $3x = -\frac{1}{4}x^2 - 9$.

f) $x^2 = 14x - 7$.

Exercice 4. D

Soit $f : x \mapsto (x + 1)^2 - 4$.

1. Développer $f(x)$.
2. Factoriser $f(x)$.
3. Parmi les trois formes précédentes de $f(x)$, choisir la plus adaptée pour :
 - (a) calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(-3)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{3})$.
 - (b) résoudre l'équation $f(x) = 0$.
 - (c) Résoudre l'équation $f(x) = -4$.
 - (d) Résoudre l'équation $f(x) = -3$.

19 Identités remarquables.