18 Base orthonormée.

I Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

II Base de vecteurs.

1 Combinaison linéaire de deux vecteurs.

2 Base de vecteurs.

III Vecteurs et coordonnées.

1 Coordonnées de vecteurs relativement à une base.

2 Égalité de vecteurs.

3 Norme de vecteurs.

4 Coordonnées d'un représentant.

5 Somme vectorielle et coordonnées.

6 Multiplication d'un vecteur par un scalaire avec les coordonnées.

IV Exercices.

Exercice 1. C

Dessinez deux points A et B distincts puis placez les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2. C

Soient A et B deux points distincts, I le milieu du segment $[AB]$.
Dans chaque cas déterminez le réel λ tel que : $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BI} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Exercice 3. C

Soient A et B deux points du plan distants de 6 unités de longueur (choisissez deux unités de longueur par centimètre).

1. (a) Construisez le point L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.

   (b) Construisez le point K tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{LK}$ peut s'écrire $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$, établissez une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{AB}$.

   (b) Déduisez-en la longueur LK en unités de longueur.

Correction de l'exercice 3

1. (a)

   (b)

2. (a) D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}\\ &= -\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK}\\ &= -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \left(-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \left(-\frac{5}{2} - 1 - \frac{4}{3}\right)\overrightarrow{AB}\\ &= \left(-\frac{5\times 3}{2\times 3} - \frac{6}{6} - \frac{4\times 2}{3\times 2}\right)\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{-15-6-8}{6}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{LK} = -\tfrac{29}{6}\overrightarrow{AB}.}$$

   (b) Puisque $\overrightarrow{LK} = -\frac{29}{6}\overrightarrow{AB}$, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{LK}\right\| &= \left|-\frac{29}{6}\right| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\\ &= \frac{29}{6} \times AB\\ &= \frac{29}{6} \times 6\end{aligned}$$

$$\boxed{LK = 29.}$$

Exercice 4. C

Soient A, B et C trois points du plan tels que :

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

1. Réalisez une figure.
2. En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ peut s'écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, exprimez le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$ en justifiant la réponse.

Correction de l'exercice 4

1.
2. Par construction

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

ce qui équivaut, d'après la relation de Chasles, à

$$3\overrightarrow{AB} - 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \vec{0}$$
$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

Finalement

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}.}$$

Exercice 5. C

Soit $MNPQ$ un parallélogramme. On définit le point R tel que $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$ et le point S tel que $\overrightarrow{MS} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

1. Réalisez une figure.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{MR}$ peut s'écrire $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$, montrez que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$.
   (b) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{NS}$ peut s'écrire $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS}$, montrez que $\overrightarrow{NS} = -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.
   (c) Déduisez-en une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{NS}$.

Correction de l'exercice 5

1.
2. (a) D'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$$

Or, d'après l'énoncé, $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$, donc en substituant :

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$$

(b)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NS} &= -\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS}\\ &= -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}\end{aligned}$$

(c) $-\frac{4}{3}\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{NS}$.

Exercice 6. C

Soient $ABCD$ un parallélogramme et S et V des points tels que $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{CD}$.

Montrez que les segments $[VS]$ et $[AC]$ ont le même milieu.

Correction de l'exercice 6

En faisant à main levé une figure nous voyons que $AVCS$ est un parallélogramme et par conséquent ses diagonales se coupent bien en leur milieu. Démontrons-le proprement.

Montrons que $AVCS$ est un parallélogramme.

Pour cela nous allons démontrer que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$.

$$\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$$

Or $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et en remplaçant :

$$\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{DC}$$

Comme, par construction, $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CS}$, en considérant les vecteurs opposés, nous en déduisons :

$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$$

Nous avons bien démontré que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$ et donc que $AVCS$ est un parallélogramme. Nous en déduisons que ses diagonales

$[VS]$ et $[AC]$ se coupent en leur milieu.

Exercice 7. C

Soient ABC un triangle rectangle en A et I est le milieu de l'hypoténuse. On appelle A' le symétrique de A par rapport à I, B' et C' les images de B et C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.

Démontrez que A' est le milieu de $[B'C']$.

Correction de l'exercice 7

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{B'I'} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{II'}$$

Or par construction I est milieu de $[AI']$ donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{II'}$, et $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{IA}$ donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'I'} &= \overrightarrow{BI}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

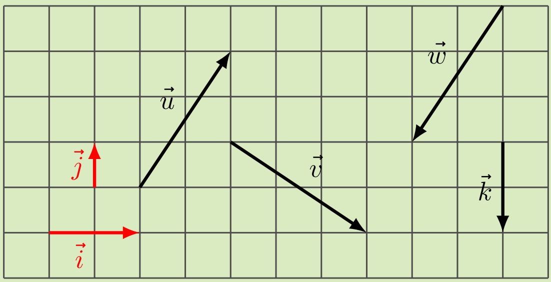
De $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CC'}$ nous déduisons que $BB'C'C$ est un parallélogramme, donc : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.

Finalement : $\overrightarrow{B'I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'}$.

I' est le milieu de $[B'C']$.

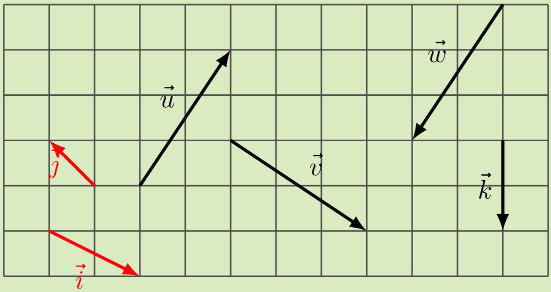
Exercice 8. C

Exprimez les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



Exercice 9. C

Exprimez les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{k}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



Exercice 10. C

Donnez les coordonnées du vecteur dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$.

1. $\vec{u} = \vec{b} - 7\vec{a}$.
2. $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 7\vec{a} + 4\vec{a}$.
3. $\vec{w} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ où $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\overrightarrow{CD} = -2\vec{b} + 5\vec{a}$

Exercice 11. C

Exercices 49 à 51 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

Correction de l'exercice 11

Exercice 49 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{d}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

(b) $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 1\vec{i} - 4\vec{j}$, $\overrightarrow{LK} = 1\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{FG} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = -4\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = -2\vec{j}$.

Exercice 50 page 188 du manuel Lelivrescolaire.
$A(-1;1)$, $B(1;1,5)$, $C(4;1,5)$, $D(1;-1)$, $E(1;-2)$, $F(7;-2,5)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0,5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2,5\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}6\\-0,5\end{pmatrix}$.
Les coordonnées sont les opposées des précédents.

Exercice 51 page 188 du manuel Lelivrescolaire.
$A(-2;3)$, $B(-3;2)$, $C(-4;0)$, $D(0;1)$, $E(-1;-2)$, $F(-3;0)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 12. C

Déterminez $x, y \in \mathbb{R}$ de sorte que $\vec{u} = \vec{v}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} x+2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 2y+3 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2x+5 \\ 3y-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 12 \\ -12y+4 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3x^2+x+7 \\ \frac{2}{y} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x-10 \\ \frac{4}{y+1} \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix} x^2 \\ y+x \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 144 \\ 3y-4 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12

a) $(x, y) = (6, 0)$. b) $(x, y) = \left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{5}\right)$. c) $\varnothing$. d) $(x, y) = (12, 16)$.

Exercice 13. C

Exercice 53 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

Correction de l'exercice 13

1. $x = 3$ et $y = -4$.
2. $x = 3$ et $y = 8$.
3. $x = -6$.

Exercice 14. C

Calculez la norme des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 15. C

Soient $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(3;0)$ et $D(-1;-3)$ des points du plan muni d'un repère.
Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.

Correction de l'exercice 15

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Démontrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 4-1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

De même

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-(-1)\\0-(-3)\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

Donc, les vecteurs ayant même coordonnées : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Et par conséquent

$$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

Exercice 16. C

Soient $A(-3;3)$, $B(2;5)$, $C(4;0)$ et $D(-1;-2)$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculez AC et BD.
3. Qu'en déduisez-vous sur $ABCD$?

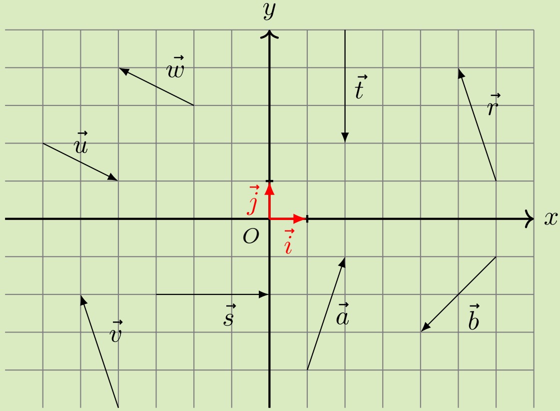
Correction de l'exercice 16

1. Il suffit de procéder comme dans l'exercice précédent
2. Le repère étant orthonormé il suffit d'utiliser la formule $AC = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$.
3. D'après les questions précédentes $ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

$$\boxed{ABCD \text{ est un rectangle.}}$$

Exercice 17. C

Lisez les coordonnées des vecteurs représentés ci-contre et indiquez ceux qui sont égaux.



Exercice 18. C

Soient $A(7;-3)$, $B(3;2)$ et $C(-5;-4)$ des points du plan muni d'un repère. Déterminez les coordonnées du point $D(x_D;y_D)$ qui vérifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Correction de l'exercice 18

Déterminons x_D et y_D.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées donc si et seulement si

$$\begin{cases} 3-7 = x-(-5) \\ 2-(-3) = y-(-4) \end{cases}$$

donc, si et seulement si

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{D(-9,1).}$$

Une rédaction alternative.

Déterminons x_D et y_D.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

De plus $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

Autrement dit dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut successivement à

$$\begin{aligned}
\frac{x_A + x_D}{2} &= \frac{x_B + x_C}{2} \quad \text{et} \quad \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{y_B + y_C}{2} \\
\frac{7 + x_D}{2} &= \frac{3 + (-5)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-3 + y_D}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} \\
x_D &= -9 \quad \text{et} \quad y_D = 1
\end{aligned}$$

Nous avons démontré qu'il y a un seul point D qui satisfassent à la condition $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et ses coordonnées sont $(-9; 1)$.

Exercice 19. C

Soient $A(2; -3)$ et $B(-1; 4)$ deux points dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Calculez $||\overrightarrow{AB}||$.

Correction de l'exercice 19

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ donc $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{58}$.

Exercice 20.

Exercices 54 page 188, 56 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

Correction de l'exercice 20

Exercice 54 page 188 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $G(-1; 2)$, $H(5; -2)$, $M(7; 4)$, $N(0, 1)$, $P(3, 0)$.

(b)

Exercice 56 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) Oui.

(b) Non.

(c) Non.

(d) Oui.

Exercice 21. C

Exercices 57 et 58 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

Correction de l'exercice 21

Exercice 57 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) $ABCD$ est un parallélogramme car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

(b) C est le milieu de $[BE]$ car $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$.

(c) C est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$ car $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DA}$.

Exercice 58 page 189 du manuel Lelivrescolaire.

(a) M' symétrique de M par la symétrie de centre P ssi P est milieu de $[MM']$, donc ssi $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PM'}$.
Donc $M'(15; -9)$.

(b) On en déduit $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$ donc P milieu de $[AC]$.

(c) D'après les questions précédentes les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu P.

Exercice 22. C

Dans un repère on considère les points : $A(-2; 1)$, $B(3; 4)$ et $C(-5; 2)$.
Calculez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Correction de l'exercice 22

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x + 3 - x + (-5) - x = 0 \\ 1 - y + 4 - y + 2 - y = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{M\left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right).}$$

Exercice 23. C

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculez $||\vec{u}||$ et $||\vec{v}||$.
2. Calculez les coordonnées $\vec{u} + \vec{v}$.
3. Montrez que $||\vec{u} + \vec{v}|| = 5$.

Correction de l'exercice 23

1. $||\vec{u}|| = 5$ et $||\vec{v}|| = \sqrt{19}$.
2. $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. $||\vec{u} + \vec{v}|| = 5$.

Exercice 24. C

1. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$.

   (a) Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées :

   a) $\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$.　　b) $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

   c) $\begin{pmatrix}1\\12\end{pmatrix}$.　　d) $\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}$.

   (b) Le vecteur $-2\vec{u}$ a pour coordonnées :

   a) $\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$.　　b) $\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$.

   c) $\begin{pmatrix}-4\\-10\end{pmatrix}$.　　d) $\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$.

2. Calculez les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ si

   a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.　　b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 24

1. (a) $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

   (b) $-2\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$.

2. (a) $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$.

   (b) $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$.

Exercice 25. C

Soients les points $A(-2;1)$, $B(4;2)$ et $C(2;4)$.

1. (a) Montrez que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(6;1)$.

   (b) Calculez les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AC}$.

   (c) Calculez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

2. (a) Placez les points dans un repère orthonormé est dessinez le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

   (b) Vérifiez le résultat de la question 1.(c).

Correction de l'exercice 25

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 2-1 \end{pmatrix}$,
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b) De même $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   (c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2.

Exercice 26. C

Déterminez les coordonnées de $-7\vec{u}$ sachant que $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 26

$-7\vec{u}\begin{pmatrix} 21 \\ -7\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 27. C

Les questions sont indépendantes les unes des autres (sauf les deux dernières).

1. Soient $\vec{u}(2,-1)$ et $\vec{v}(1;2)$.
   (a) Calculez les coordonnées de $3\vec{u}$ et $2\vec{v}$.
   (b) Calculez les coordonnées de $3\vec{u}+2\vec{v}$.
2. Soient $\vec{u}(5;1)$ et $\vec{v}(2;-3)$. calculez les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$, $2\vec{u}$, $-3\vec{v}$ et $2\vec{u}-3\vec{v}$.
3. Soient $\vec{u}(0;-1)$, $\vec{v}(3;4)$ et $\vec{w}(8;-6)$. Calculez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
4. Soient $\vec{u}(0;5)$ et $\vec{v}(4;-2)$.
   (a) Calculez la norme de chacun des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   (b) Calculez les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
   (c) Montrez que $||\vec{u}+\vec{v}|| = 5$.
5. Dites en justifiant si la proposition suivante est vraie : « Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ ».

Correction de l'exercice 27

1. 34 page 136.

(a) $3\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ et $2\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

(b) $3\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}6+2\\-3+4\end{pmatrix}$ donc $3\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$.

2. 92 page 140.
   $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$, $2\vec{u}\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}$, $-3\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$, $2\vec{u}-3\vec{v}\begin{pmatrix}4\\11\end{pmatrix}$.
3. 94 page 140.
   $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=5$, $\|\vec{w}\|=10$.
4. 95 page 140.
   (a) $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=2\sqrt{5}$.
   (b) i. $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
       ii. $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{4^2+3^2}=5$.
5. 96 page 140.
   L'affirmation est fausse. Un contre-exemple est fourni par l'exercice précédent.

tyu

Exercice 28. C

Soient $A(-1;-2)$, $B(5;-1)$, $C(6;3)$ et $D(0;2)$ des points considérés dans un repère du plan.

1. Faites un figure.
2. Construisez le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.
3. Déterminez les coordonnées de E.
4. Démontrez que $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BC}$.
5. Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 29. C

Soient ABC un triangle et K, L et M les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1. Démontrez que $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{BM}$.
2. Déduisez-en $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$.

Correction de l'exercice 29

Si aucune figure n'est demandée il est nécessaire pour aborder un tel exercice de faire un schéma.

1. Comme M est le milieu de $[BC]$:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Donc, d'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

Puisque K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AL}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times 2\overrightarrow{KA} + \frac{1}{2}\times 2\overrightarrow{AL}\\ &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{KL}}$$

2. Puisque M est le milieu de $[BC]$

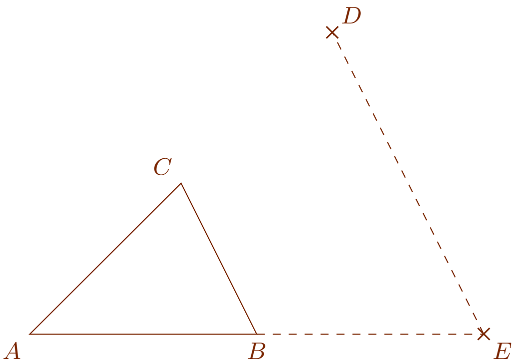
$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$$

Donc, d'après la question précédente :

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{KL}.}$$

Exercice 30. C
Soient ABC un triangle, D et E des points tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$. Faites une figure puis démontrez que C est le milieu du segment $[AD]$.

Correction de l'exercice 30



Nous allons utiliser une caractérisation vectorielle du milieu : C est le milieu de $[AD]$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Démontrons que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Pour démontrer cette égalité nous disposons d'informations sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BC}$. Nous allons, avec la relation de Chasles, nous allons décomposer $\overrightarrow{AD}$ en faisant apparaître tous ces vecteurs. Autrement dit il faut trouver un chemin qui va de A à D et qui passe si possible par B et E (ou C mais il s'avérera que ce n'est pas nécessaire).

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}$$

Comme $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}\\ &= 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}\\ &= 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$$

Nous en déduisons finalement

$$\boxed{C \text{ est le milieu de } [AD].}$$

Nous aurions pu aussi utiliser une variante du théorème des milieux.

Exercice 31. C

Soient $ABCD$ un carré non trivial (non réduit à un point), E le symétrique de A par rapport à B et I le milieu de $[BC]$.

1. Faites un croquis à main levé.
2. Justifiez que $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé du plan.
3. Déterminez les coordonnées des différents points de la figure puis montrez que I est le milieu de $[DE]$.
4. Démontrez ce résultat sans utiliser de repère.

Correction de l'exercice 31

1. Par construction ABD est un triangle isocèle rectangle en A donc

$$\boxed{\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right).}$$

2. * Du fait du choix du repère : $A(0;0)$, $B(1;0)$, $D(0;1)$.
   * Puisque $ABCD$ est un carré : $C(1;0)$.
   * E est le symétrique de A par rapport à B. Autrement dit B est le milieu de $[AE]$. Nous en déduisons :

$$x_B = \frac{x_A + x_E}{2}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{0 + x_2}{2} \\ 1\times 2 &= \frac{x}{2}\times 2 \\ 2 &= x_E \end{aligned}$$

et de même pour les ordonnées :

$$y_B = \frac{y_A + y_E}{2}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{0 + y_2}{2} \\ 0\times 2 &= \frac{x}{2}\times 2 \\ 0 &= y_E \end{aligned}$$

Ainsi : $E(2,0)$.

* Puisque I est le milieu de $[BC]$:

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ &= \frac{1+1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_I &= \frac{y_B + y_C}{2} \\ &= \frac{0+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc : $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Démontrons que I est le milieu de $[DE]$.

Nous allons simplement vérifier que le milieu de $[DE]$ et I coïncident car ils ont même coordonnées.

Si nous notons M le milieu de $[DE]$ nous avons d'une part

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_D + x_E}{2} \\ &= \frac{0+2}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_D + y_E}{2} \\ &= \frac{1+0}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Puisque M et I ont même coordonnées nous pouvons affirmer

$$\boxed{I \text{ est le milieu de } [DE].}$$

3. En utilisant le théorème des milieux.

Exercice 32. C

On considère un carré $ABCD$ non réduit à un point.

1. Justifiez que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère du plan. Est-il orthonormé ?
2. Justifiez que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et en déduire les coordonnées du point C dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
3. On considère le point E symétrique de A par rapport à B et le point F symétrique de F par rapport à D.

   Déterminez les coordonnées des points E et F dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
4. Que semble représenter le point C par rapport aux points E et F ? Démontrez le par au moins 3 méthodes différentes.

Correction de l'exercice 32

1. $ABCD$ est un carré donc ABD est un triangle isocèle rectangle en A. Par conséquent

   $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé.

2. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, d'après l'identité du parallélogramme

   $$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

   Calculons les coordonnées de C.

   * D'une part $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$,
   * d'autre part $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} (1-0)+(0-0) \\ (0-0)+(1-0) \end{pmatrix}$,

   nous en déduisons donc : $x_C = 1$ et $y_C = 1$.

   $$C(1; 1).$$

3. Puisque E et le symétrique de A par rapport à B, B est le milieu de $[AE]$ et, par conséquent, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$.

   Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nous en déduisons $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 2\times 1 \\ 2\times 0 \end{pmatrix}$ *i.e.* $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mais $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{cases} x_E = 2 \\ y_E = 0 \end{cases}$$

$$E(2;0).$$

En procédant de même

$$F(0;2).$$

4. C est le milieu de $[EF]$.
   Voici trois méthodes pour le démontrer :
   * Montrer avec les coordonnées que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CF}$.
   * En calculant les coordonnées du milieu de $[EF]$ nous nous rendons compte qu'elles coïncident avec celles de C.
   * En utilisant le théorème des milieux. Ceci dit il faudrait expliciter le fait que C est dans le même demi-plan délimité par (AD) que F.

Exercice 33. C

Soient T, R et I trois points non alignés.
Les points U et V sont définis par :

- $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{IR} + \overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TI} + \overrightarrow{TR}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IT} + \overrightarrow{TR}$.
   (b) Conclure.

Exercice 34. C

Soient T, R et I trois points non alignés. On définit les points A, B et C par :

- $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{RT} - \overrightarrow{IT}$
- $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RI}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.

   (b) En déduire une expression des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{RT}$ puis conclure.

Correction de l'exercice 34

1.
2.
3. (a) D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\\ &= -\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}\\ &= \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}\end{aligned}$$

   De même : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.

   (b) D'après la question précédente :

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$$

   Donc, d'après l'énoncé :

Exercice 35.