

18 Base orthonormée.

I Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Il paraît naturel de noter : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$.
En généralisant nous définirons n'importe quel vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$, λ désignant un réel.

Définition 1

Soient \overrightarrow{AB} le représentant d'un vecteur et λ un nombre quelconque.

Nous définissons le vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$ par

— $\lambda\overrightarrow{AB}$ a même direction que \overrightarrow{AB}

— la norme : $\|\lambda\overrightarrow{AB}\| = |\lambda| \times \|\overrightarrow{AB}\|$

— si $\lambda > 0$ alors $\lambda\overrightarrow{AB}$ et \overrightarrow{AB} ont même sens et si $\lambda < 0$ alors ils sont de sens contraire.

Remarques.

1. Plutôt que d'apprendre cette définition sachez l'utiliser. Les vecteurs ont même direction, la longueur est multipliée par autant que l'indique λ et le sens dépend du signe de λ .
2. Nous retrouverons les règles habituelles de distributivité, de commutativité, d'associativité.

Si λ et μ sont des nombres et \vec{u} et \vec{w} des vecteurs, alors

$$\lambda(\vec{u} + \vec{w}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{w}, \quad (\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}, \quad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$$

3. L'addition et la multiplication par un nombre sont les deux opérations qui définissent de façon très général un espace vectoriel.

II Base de vecteurs.

1 Combinaison linéaire de deux vecteurs.

Définition 2

Soient

. \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan,

. a et b deux réels.

Nous dirons que le vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est une *combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v}* .

Remarques.

1. C'est pourquoi la branche des mathématiques traitant des vecteurs est appelée l'*algèbre linéaire* : *algèbre* à cause des calculs et *linéaire* à cause des *combinaisons linéaires* (et de l'origine historique).

2 Base de vecteurs.**Définition 3**

Soient

- . \vec{i} et \vec{j} deux vecteurs du plan,
- . O un point du plan,
- . I l'image de O par la translation de vecteur \vec{i} ,
- . J l'image de O par la translation de vecteur \vec{j} .

Nous dirons que (\vec{i}, \vec{j}) est *une base du plan* si et seulement si $(O; I, J)$ est un repère du plan.

Remarques.

1. Pour que $(O; I, J)$ soit un repère il faut que les points O, I et J soient distincts et non alignés.
2. Autrement dit \vec{i} et \vec{j} n'ont pas la même direction et ne sont pas nuls.
3. Si de plus $(O; I, J)$ est un repère orthonormé alors nous dirons que (\vec{i}, \vec{j}) est *une base orthonormée*.
4. Nous pourrions dorénavant parler du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Un repère est complètement défini par la donnée d'un point et d'une base.

III Vecteurs et coordonnées.**1 Coordonnées de vecteurs relativement à une base.**

En utilisant les bases et les combinaisons linéaires nous pouvons définir les coordonnées d'un vecteur. Par exemple le vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$ aura pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Définition 4

Soient :

- . (\vec{i}, \vec{j}) une base du plan,
- . \vec{u} un vecteur du plan.

Il existe un unique couple de réels (x, y) de nombres réels x et y tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Le couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est appelé le couple des *coordonnées* de \vec{u} .

Remarques.

1. De même que les coordonnées d'un point dépendent du repère choisi, les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie.
2. Pour une base fixée les coordonnées du vecteur sont uniques.
Cette affirmation constitue un théorème qu'il faudrait démontrer ce que nous nous garderons de faire.
3. Les vecteurs de la base sont les vecteurs, en nombre minimum, qui permettent de décrire n'importe quelle translation.
4. Concrètement pour obtenir les coordonnées d'un vecteur dans un repère il suffit de compter les carreaux en suivant l'axe des abscisses puis recommence suivant l'axe des ordonnées, en partant de l'origine pour rejoindre l'extrémité.
5. Les coordonnées de vecteurs sont plutôt notées en colonne qu'en ligne

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

x est appelé l'abscisse et y l'ordonnée.

6. Si M est l'extrémité du représentant de \vec{u} d'origine O alors M et \vec{u} ont les mêmes coordonnées.

2 Égalité de vecteurs.**Proposition 1**

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées (dans la même base).

Démonstration

Ce résultat découle directement de l'unicité des coordonnées admises dans la précédente définition. ■

3 Norme de vecteurs.**Définition 5**

Soient :

- . (\vec{i}, \vec{j}) une base du plan,
- . $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur.

Nous appellerons **norme de \vec{u}** , et nous noterons $\|\vec{u}\|$, le nombre

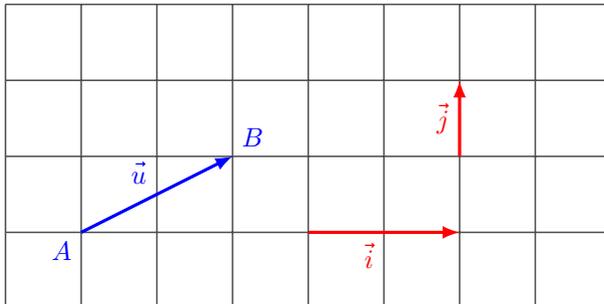
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemples.

1. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{58} \end{aligned}$$

2. On considère le quadrillage ci-dessous formé de carrés d'un centimètre de côté.



$$AB = \sqrt{5} \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Longueur et norme ne coïncident pas toujours.

Remarques.

1. La norme d'un vecteur est un nombre positif.
2. Nous avons déjà donné une définition de la norme d'un vecteur dans le cas d'un vecteur au sens géométrique (représentant du vecteur). Cette définition se veut un peu plus général puisqu'elle fonctionne pour d'autres sortes de vecteurs. Cependant cette définition de la norme dépend de la base choisie.
3. La norme d'un vecteur peut se confondre avec la longueur si le repère est orthonormé.

4 Coordonnées d'un représentant.

Proposition 2

Soient :

- . (O, I, J) un repère du plan,
- . $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ des points dans ce repère,
- . (\vec{i}, \vec{j}) la base associée au repère $(O; I, J)$ (*i.e* $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$).

On a

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Démonstration

Déterminons les coordonnées de \overrightarrow{AB} .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= x_B \vec{i} + y_B \vec{j} - (x_A \vec{i} + y_A \vec{j}) \\ &= (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} \end{aligned}$$

Donc

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$



5 Somme vectorielle et coordonnées.

Proposition 3

$$\text{Si } \vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

6 Multiplication d'un vecteur par un scalaire avec les coordonnées.

Proposition 4

$$\text{Si } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ alors } \lambda \vec{u} \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

IV Exercices.

Exercice 1. C

Dessinez deux points A et B distincts puis placez les points M , N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2. C

Soient A et B deux points distincts, I le milieu du segment $[AB]$.
Dans chaque cas déterminez le réel λ tel que : $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BI} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Exercice 3. C

Soient A et B deux points du plan distants de 6 unités de longueur (choisissez deux unités de longueur par centimètre).

1. (a) Construisez le point L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
- (b) Construisez le point K tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. (a) En remarquant que le vecteur \overrightarrow{LK} peut s'écrire $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$, établissez une relation entre les vecteurs \overrightarrow{LK} et \overrightarrow{AB} .
- (b) Déduisez-en la longueur LK en unités de longueur.

Exercice 4. C

Soient A , B et C trois points du plan tels que :

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

1. Réalisez une figure.
2. En remarquant que le vecteur \overrightarrow{AC} peut s'écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, exprimez le vecteur \overrightarrow{AB} en fonction du vecteur \overrightarrow{BC} en justifiant la réponse.

Exercice 5. C

Soit $MNPQ$ un parallélogramme. On définit le point R tel que $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$ et le point S tel que $\overrightarrow{MS} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

1. Réalisez une figure.
2. (a) En remarquant que le vecteur \overrightarrow{MR} peut s'écrire $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$, montrez que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$.
- (b) En remarquant que le vecteur \overrightarrow{NS} peut s'écrire $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS}$, montrez que $\overrightarrow{NS} = -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.
- (c) Déduisez-en une relation entre les vecteurs \overrightarrow{MR} et \overrightarrow{NS} .

Exercice 6. C

Soient $ABCD$ un parallélogramme et S et V des points tels que $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{CD}$.

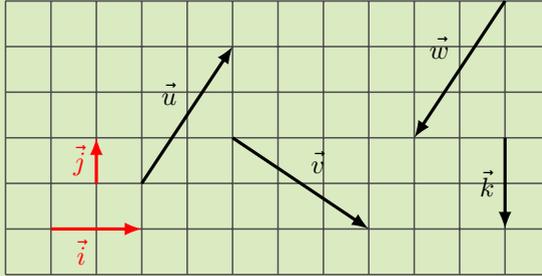
Montrez que les segments $[VS]$ et $[AC]$ ont le même milieu.

Exercice 7. C

Soient ABC un triangle rectangle en A et I est le milieu de l'hypoténuse. On appelle A' le symétrique de A par rapport à I , B' et C' les images de B et C dans la translation de vecteur \vec{AI} .
Démontrez que A' est le milieu de $[B'C']$.

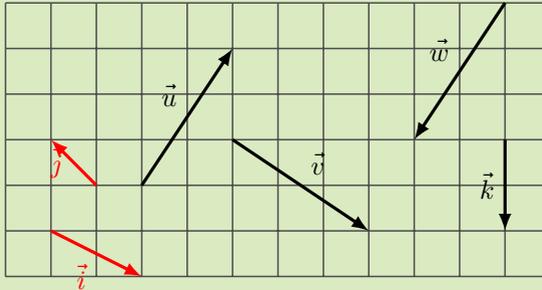
Exercice 8. C

Exprimez les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et \vec{k} comme combinaisons linéaires des vecteurs \vec{i} et \vec{j} .



Exercice 9. C

Exprimez les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et \vec{k} comme combinaisons linéaires des vecteurs \vec{i} et \vec{j} .



Exercice 10. C

Donnez les coordonnées du vecteur dans la base (\vec{a}, \vec{b}) .

1. $\vec{u} = \vec{b} - 7\vec{a}$.

2. $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 7\vec{a} + 4\vec{a}$.

3. $\vec{w} = 2\vec{AB} - 3\vec{CD}$ où $\vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{CD} = -2\vec{b} + 5\vec{a}$

Exercice 11. C

Exercices 49 à 51 page 188 du [manuel Lelivrescolaire](#).

Exercice 12. C

Déterminez $x, y \in \mathbb{R}$ de sorte que $\vec{u} = \vec{v}$.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} x+2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 2y+3 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} -2x+5 \\ 3y-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 12 \\ -12y+4 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3x^2+x+7 \\ \frac{2}{y} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x-10 \\ \frac{4}{y+1} \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} x^2 \\ y+x \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 144 \\ 3y-4 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. C

Exercice 53 page 188 du [manuel Lelivrescolaire](#).

Exercice 14. C

Calculez la norme des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 15. C

Soient $A(-2; 1)$, $B(2; 4)$, $C(3; 0)$ et $D(-1; -3)$ des points du plan muni d'un repère.

Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.

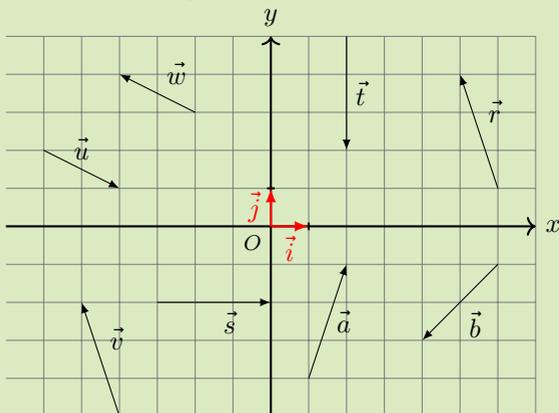
Exercice 16. C

Soient $A(-3; 3)$, $B(2; 5)$, $C(4; 0)$ et $D(-1; -2)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculez AC et BD .
3. Qu'en déduisez-vous sur $ABCD$?

Exercice 17. C

Lisez les coordonnées des vecteurs représentés ci-contre et indiquez ceux qui sont égaux.



Exercice 18. C

Soient $A(7; -3)$, $B(3; 2)$ et $C(-5; -4)$ des points du plan muni d'un repère. Déterminez les coordonnées du point $D(x_D; y_D)$ qui vérifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Exercice 19. C

Soient $A(2; -3)$ et $B(-1; 4)$ deux points dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Calculez $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Exercice 20.

Exercices 54 page 188, 56 page 189 du [manuel Lelivrescolaire](#).

Exercice 21. C

Exercices 57 et 58 page 189 du [manuel Lelivrescolaire](#).

Exercice 22. C

Dans un repère on considère les points : $A(-2; 1)$, $B(3; 4)$ et $C(-5; 2)$. Calculez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Exercice 23. C

Soit les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculez $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
2. Calculez les coordonnées $\vec{u} + \vec{v}$.
3. Montrez que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$.

Exercice 24. C

1. Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(a) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(b) Le vecteur $-2\vec{u}$ a pour coordonnées :

a) $\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$.

2. Calculez les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ si

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 25. C

Soient les points $A(-2; 1)$, $B(4; 2)$ et $C(2; 4)$.

1. (a) Montrez que les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont $(6; 1)$.
- (b) Calculez les coordonnées du vecteurs \overrightarrow{AC} .
- (c) Calculez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2. (a) Placez les points dans un repère orthonormé et dessinez le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- (b) Vérifiez le résultat de la question 1.(c).

Exercice 26. C

Déterminez les coordonnées de $-7\vec{u}$ sachant que $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 27. C

Les questions sont indépendantes les unes des autres (sauf les deux dernières).

- Soient $\vec{u}(2, -1)$ et $\vec{v}(1; 2)$.
 - Calculez les coordonnées de $3\vec{u}$ et $2\vec{v}$.
 - Calculez les coordonnées de $3\vec{u} + 2\vec{v}$.
- Soient $\vec{u}(5; 1)$ et $\vec{v}(2; -3)$. calculez les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$, $2\vec{u}$, $-3\vec{v}$ et $2\vec{u} - 3\vec{v}$.
- Soient $\vec{u}(0; -1)$, $\vec{v}(3; 4)$ et $\vec{w}(8; -6)$. Calculez la norme de chacun des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .
- Soient $\vec{u}(0; 5)$ et $\vec{v}(4; -2)$.
 - Calculez la norme de chacun des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .
 - Calculez les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
 - Montrez que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$.
- Dites en justifiant si la proposition suivante est vraie : « Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ ».

tyu

Exercice 28. C

Soient $A(-1; -2)$, $B(5; -1)$, $C(6; 3)$ et $D(0; 2)$ des points considérés dans un repère du plan.

- Faites un figure.
- Construisez le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
- Déterminez les coordonnées de E .
- Démontrez que $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC}$.
- Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 29. C

Soient ABC un triangle et K , L et M les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

- Démontrez que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BM}$.
- Déduisez-en \overrightarrow{BC} en fonction de \overrightarrow{KL} .

Exercice 30. C

Soient ABC un triangle, D et E des points tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.
Faites une figure puis démontrez que C est le milieu du segment $[AD]$.

Exercice 31. C

Soient $ABCD$ un carré non trivial (non réduit à un point), E le symétrique de A par rapport à B et I le milieu de $[BC]$.

1. Faites un croquis à main levée.
2. Justifiez que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé du plan.
3. Déterminez les coordonnées des différents points de la figure puis montrez que I est le milieu de $[DE]$.
4. Démontrez ce résultat sans utiliser de repère.

Exercice 32. C

On considère un carré $ABCD$ non réduit à un point.

1. Justifiez que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan. Est-il orthonormé?
2. Justifiez que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et en déduire les coordonnées du point C dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
3. On considère le point E symétrique de A par rapport à B et le point F symétrique de F par rapport à D .
Déterminez les coordonnées des points E et F dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
4. Que semble représenter le point C par rapport aux points E et F ? Démontrez le par au moins 3 méthodes différentes.

Exercice 33. C

Soient T , R et I trois points non alignés.

Les points U et V sont définis par :

- $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{IR} + \overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TI} + \overrightarrow{TR}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IT} + \overrightarrow{TR}$.
(b) Conclure.

Exercice 34. C

Soient T , R et I trois points non alignés. On définit les points A , B et C par :

- $\vec{IA} = \vec{RT} - \vec{IT}$
- $\vec{IB} = \vec{TI}$
- $\vec{IC} = \vec{RT} + \vec{RI}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\vec{AC} = \vec{IC} - \vec{IA}$ et $\vec{BA} = \vec{IA} - \vec{IB}$.
 (b) En déduire une expression des vecteurs \vec{BA} et \vec{AC} en fonction de \vec{RT} puis conclure.

Exercice 35.

