14 Décimaux.

I $\mathbb{D}$.

Il existe un ensemble classique de nombres que nous n'avons pas évoqué c'est *l'ensemble des nombres décimaux* que nous noterons $\mathbb{D}$. Si cet ensemble a eu droit à un nom et une notation personnalisée c'est à cause de son importance pour les sciences expérimentales, en informatique et en mathématique pour donner des valeurs approchées des nombres dont il est impossible de donner une valeur exacte.

Un nombre est décimal s'il est possible de l'écrire sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

Bien entendu $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$; tous les nombres décimaux sont des nombres réels.

Exemples.

1. $-0,1 \in \mathbb{D}$.
2. $\dfrac{9078687656}{100} \in \mathbb{D}$.
3. Nous verrons plus loin que, par exemple, $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Il existe d'autres façon de reconnaître des nombres décimaux que l'écriture sous forme d'une fraction $\frac{a}{10^n}$ où a et n sont des entiers.

Les nombres décimaux sont aussi ceux qui admettent une écriture décimale finie.

Un nombre est décimal s'il admet un développement décimal infini ne comportant que des zéros à partir d'un certain rang. Par exemple : $2,34000\ldots$ et $-0,088000\ldots$.

Les nombres décimaux sont enfin ceux qui admettent une écriture fractionnaire de la forme $\dfrac{a}{2^p \times 5^n}$ où a, n et p sont des nombres entiers.

Un nombre est décimal s'il admet une écriture fractionnaire dont le numérateur est un entier et le dénominateur le produit d'une puissance de deux et d'une puissance de 5.

II Encadrer un réel.

La recherche d'une valeur approchée d'un nombre est contraire au désir de vérité absolue propre aux mathématiques. C'est pourquoi si nous acceptons, contraints et forcés, de ne pas avoir des valeurs exactes il faut que du moins nous limitions notre erreur.

14 est une valeur approchée de 20 000 000 mais c'est sans intérêt tant cette approximation est grossière. Nous voyons bien sur cet exemple qu'il est vain de

parler de valeur approchée si nous ne sommes pas capable de limiter, de quantifier, l'erreur commise.

Nous ne pouvons pas donner exactement l'erreur commise car, sinon, nous connaîtrions la valeur exacte. Nous indiquons l'erreur maximale que nous commettons sous forme d'écart, de distance maximale, entre notre valeur approchée et la valeur exacte.

Pour parler de la distance entre les nombres nous utiliserons donc la valeur absolue.

Définition 1

Soient $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $v \in \mathbb{D}$.

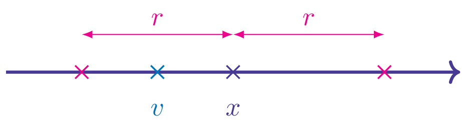
Nous dirons qu'un nombre décimal v est *une valeur approchée d'un nombre x à r près* si la distance entre v et x est inférieure à r. Autrement dit si :

$$|x - v| \leqslant r.$$

Remarques.

Remarques.

1. Pour se représenter la situation nous raisonnons géométriquement :



2. Nous voyons clairement sur le précédent schéma que $v \in [x-r; x+r]$. r peut être appelé le *rayon de l'intervalle* (par analogie avec le disque) et $2r$ est alors le diamètre ou l'*amplitude* de l'intervalle ou de l'encadrement.
3. Si la valeur approchée v est inférieure à la valeur exacte x nous dirons que v est *une valeur approchée par défaut.*

   De même si $x \leqslant v$ nous dirons que v est *une valeur approchée par excès.*
4. Un procédé simple pour obtenir une valeur approchée à 10^{-n}, avec $n \in \mathbb{N}$, consiste à arrêter son écriture décimale au n-ième chiffre après la virgule. Ce procédé est appelé *troncature*. Tronquer $1,23456$ à 10^{-4} donne $1,2345$. Tronquer $-1,23456$ à 10^{-3} donne $-1,234$.

Exemples.

1. Puisque $1,9 \in [2 - 0,5; 2 + 0;5]$ nous pouvons dire que $1,9$ est une valeur approchée de 2 à $0,5$ près.

Définition 2

Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{D}$.

Nous dirons que v est *une valeur arrondie de x à 10^n près* si v est une valeur approchée de x à $\frac{1}{2} \times 10^n$ près et si $v \times 10^{-n}$ est un entier.

Remarques.

1. Nous retiendrons que l'arrondie est la plus proche des valeurs approchées par excès et pa défaut.

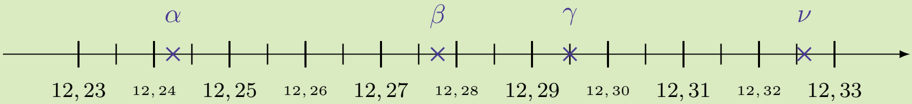
III $\frac{1}{3}$.

1 $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

2 Approximation.

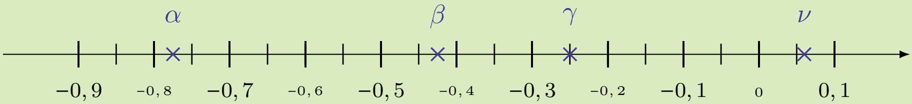
IV Exercices.

Exercice 1. B



Donnez, pour α, β, γ et ν, un encadrement décimal d'amplitude 10^{-2}, des valeurs approchées par excès, par défaut et arrondies à 10^{-2} près.

Exercice 2. B



Donnez, pour α, β, γ et ν, un encadrement décimal d'amplitude 10^{-1}, des valeurs approchées par excès, par défaut et arrondies à 10^{-1} près.

Exercice 3. C

Donnez un encadrement décimal de $\dfrac{2}{3}$ à $0,1$ près, puis à $0,01$ près, puis $0,001$ près.

Exercice 4.

Donnez, avec une précision de 10^{-4}, un encadrement décimal, des valeurs approchées par défaut et par excès et enfin une valeur arrondie de $\dfrac{11}{7}$.

Exercice 5. C

À l'aide de la calculatrice donnez

a) un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-3},

b) une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} par défaut,

c) une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} par excès,

d) une valeur arrondie de $\sqrt{2}$ à 10^{-3},

e) une valeur arrondie de $-\sqrt{3}$ à 10^{-5},

f) une valeur arrondie de e à 10^{-4}.

Exercice 6. C

En physique on a mesuré une masse m et on donne comme résultat $m = 11,6$ kg.
Le dernier chiffre est en fait inconnu à $\pm 0,5$ kg.
Donnez un encadrement de m en kg et précisez sont amplitude.

Exercice 7.

Donnez encadrement, valeurs approchées et arrondie du nombre α avec la précision ε.

a) $\alpha = 857,543$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

b) $\alpha = -3,14159$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

c) $\alpha = \pi + \sqrt{5}$, $\varepsilon = 0,001$.

d) $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\varepsilon = 0,0001$.

e) $\alpha = 23\,450\,000$, $\varepsilon = 10^{5}$.

f) $\alpha = 14$, $\varepsilon = 10^{-1}$.

Exercice 8. D

1. À la Grecque. En considérant un disque de rayon 1 cm et des carrés, expliquez l'encadrement $3 < \pi < \dfrac{22}{7}$.
2. Pour calculer l'air d'un disque, les Égyptiens procédez ainsi : multiplier le diamètre par 8, diviser par 9 puis élever au carré.
   Quel résultat obtient-on pour un disque de rayon 1 cm ?
3. Comparer les deux résultats obtenus.

Exercice 9. D

La vitesse d'un satellite qui tourne autour de la Terre sur son orbite circulaire est donnée par la formule :

$$V = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

où R est le rayon de la Terre, g est l'accélération de la pesanteur d'environ $9,81$ m/s^2 et h l'altitude du satellite.

Calculez la vitesse du satellite an m/s puis en km/h pour une hauteur de 200 km ? de 50 000 km ?