13 Distance entre points du plan.

I Repère.

Un repère est une façon de donner des indication numériques sur la position d'un objet géométrique dans le plan.

Il existe d'autres repère, notamment le repérage avec les coordonnées polaires qui est plus adapté pour décrire des trajectoires circulaires.

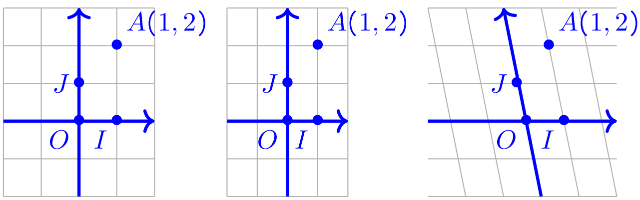
Définition 1

Nous appellerons *repère cartésien du plan* la donnée, dans cet ordre, de trois points O, I et J du plan euclidien non alignés et distincts deux à deux. Nous le noterons (O, I, J).

(i) Le repère (O, I, J) est dit *orthogonal* lorsque le triangle OIJ est rectangle en O.

(ii) Le repère (O, I, J) est dit *orthonormal*, ou *orthonormé*, lorsque le triangle OIJ est isocèle rectangle en O.

Exemples.



Remarques.

1. On pourrait ajouter un nouveau point K et considérer le repère (O, I, J, K) pour passer d'un espace à deux dimensions à un espace à trois dimensions.
2. Dans un couple de coordonnées la première coordonnée est (toujours) l'*abscisse* et la seconde l'*ordonnée*.
3. Nous noterons $\left(O, \vec{i}\right)$ l'*axe des abscisses* *i.e.* la droite (OI) orientée de O vers I.
   De même nous noterons $\left(O, \vec{j}\right)$ l'*axe des ordonnées* *i.e.* la droite (OJ) orientée de O ver J.
   Les notations $\vec{i}$ et $\vec{j}$ seront expliquées dans une autre leçon.

II Distance.

Définition 2

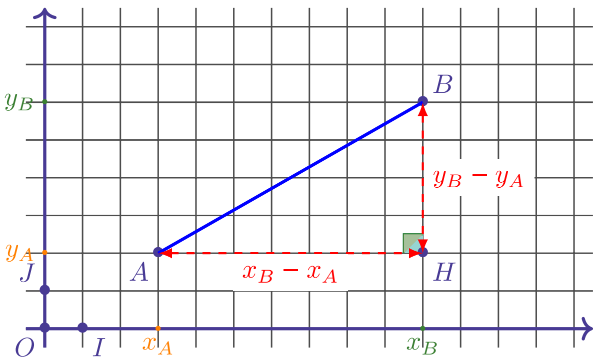
Dans un repère (O, I, J) orthonormé sont placés deux points A et B dont les coordonnées sont respectivement $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.

La distance (euclidienne affine) de A à B est définie par

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Remarques.

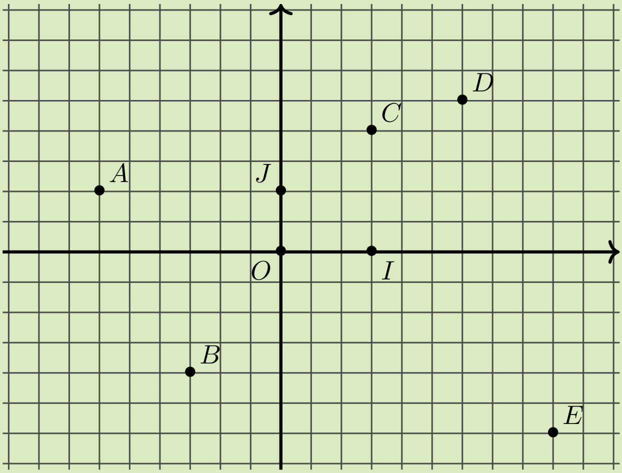
1. Cette formule permet de calculer (les distances donc) les longueurs en géométrie repérée. Elle sera donc utiliser avec des résultats utilisant les longueurs : théorème de Thalès, théorème de Pythagore, calculs d'aires.
2. Cette définition n'est valable que pour les repères orthonormés. Ce peut être un indice dans les exercices.
3. Cette formule généralise la distance vue avec la valeur absolue : pour A et B des points de la droite numérique, $AB = |x_A - x_B| = \sqrt{(x_A - x_B)^2}$. Elle se généralise en trois dimensions comme vous le verrez en terminale : $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$.
4. Cette formule est également appelée formule de la *moyenne géométrique*.
5. Cette formule est ici introduite comme une définition cependant il est possible de faire le lien avec la géométrie classique et les distance sur les axes gradués grâce au théorème de Pythagore :



III Exercices.

Exercice 1. A

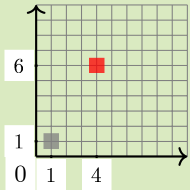
Dans le repère (O, I, J) ci-dessous



1. déterminez les coordonnées des points A, B, C, D et E ;
2. placez les points
   a) $F(1; -2)$, b) $G(-1; 3)$, c) $H\left(\frac{2}{3}; 0\right)$.

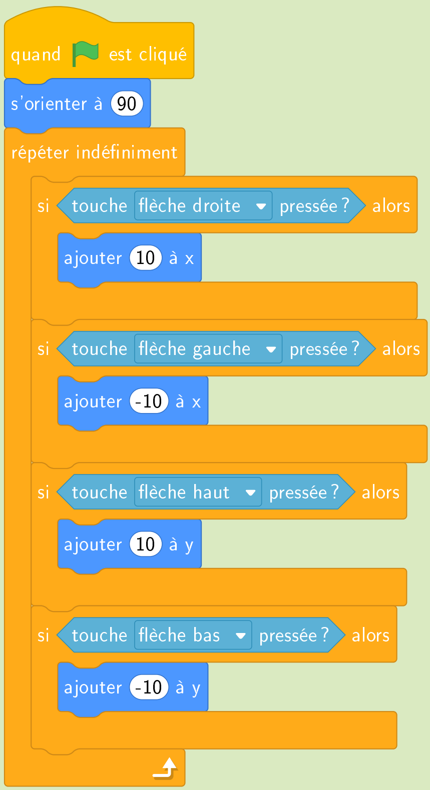
Exercice 2. A

L'affichage sur un moniteur (écran) est constitué de pixels, *i.e.* de tout petits carrés illuminés d'une seule couleur à la fois.
Il est possible de repérer chaque pixel par ses coordonnées.



Lors de la création d'un jeu vidéo l'affichage d'un personnage sera centré sur un pixel.

Afin de déplacer le personnage (ici le lutin sous Scratch) vers la droite ou vers la gauche le programme suivant est créé.
Le lutin apparaît au pixel de coordonnées $(0, 0)$.



1. Donnez les abscisses et ordonnées du lutin si l'utilisateur appuie sur la touche « bas ».
2. Donnez les abscisses et ordonnées du lutin si l'utilisateur appuie successivement sur la touche « bas », la touche « gauche », la touche « bas » et à nouveau la touche « bas ».
3. Proposez un enchaînement de touches sur lesquelles appuyer afin que le lutin se retrouve au point de coordonnées $(-90, 30)$.
4. Expliquez pourquoi il est impossible que le lutin se retrouve au point de coordonnées $(25, -60)$.
5. Quelle transformation du plan est appliquée au lutin lorsqu'une instruction  est réalisée ?

Exercice 3. B

Tracez un repère orthonormé (O, I, J) (1 cm ou un carreau pour unité) puis placez les points : $A(1; 3)$, $B(-3; 1)$ et $C(3, -3)$.

Exercice 4. C

Les points $N(1; 1)$, $P(-2; -1)$ et $Q(3; -2)$ sont placés dans un repère orthonormé du plan.
Démontrez que le triangle NPQ est isocèle en N.

Exercice 5. C

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), les points $K(-1; 7)$, $L(-1; 4)$ et $M(3; 4)$ sont choisis.
Démontrez que le triangle KLM est rectangle en L.

Exercice 6. C

Dans un repère orthonormé on considère les points $I(4; -50)$ et $M(25; 13)$ démontrez que M appartient au cercle de centre I et de rayon $21\sqrt{10}$.

Exercice 7. C

Rédigez une fonction Python ou en Scratch qui détermine la longueur AB en fonction des coordonnées des points A et B dans un repère orthonormé.

Exercice 8. C

Dans un repère orthonormé, on donne les points : $E(3; -2)$, $F(-2; -3)$, $G(-3; 2)$.
Quelle est la nature du triangle EFG ?

Exercice 9. C

Dans un repère orthonormé du plan sont donnés les points $A(4; 2)$, $B(6; -4)$ et $C(0, -2)$.

1. Démontrez que le triangle ABC est isocèle.
2. On note H le pied de la hauteur issue de B. Calculez la longueur AH, puis la longueur BH.

Exercice 10. C

Dans un repère orthonormé (O, I, J) on donne les points :

$$A(4; 3),\ B(-1; 0) \text{ et } K(3, -1)$$

Montrez que K appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 11. 10

Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité 1 cm, on considère les points suivants : $A(6; 0)$, $B(0; 4)$ et $C(1; -1)$.

1. Faire une figure.
2. Prouver que le triangle ABC est rectangle.
3. On appelle K le milieu du segment $[AB]$.
   (a) Calculer les coordonnées de K.
   (b) Prouver que K appartient à la médiatrice de $[OC]$.