12 Calculer avec la racine carrée.

I Définition.

Définition 1

La *racine carrée* d'un nombre $a \in \mathbb{R}$, si elle existe, est un nombre positif x tel que :

$$x \times x = x^2 = a$$

et on note : $x = \sqrt{a}$.

Exemples.

1. La racine carrée de $a = 4$ est $\sqrt{4} = 2$. En effet $x = 2$ est bien un nombre positif et $x^2 = 2^2 = 2 \times 2 = 4 = a$.
2. De même : $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{81} = 8$, $\sqrt{100} = 10$ et $\sqrt{121} = 11$.
3. Nous ne pouvons pas trouver d'écriture décimale finie ou fractionnaire pour les radicaux d'entiers qui ne sont pas des carrés parfaits : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... C'est pourquoi nous les écrirons toujours $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$...

Remarques.

1. Compte tenu de la règle du signe d'un produit on ne peut prendre la racine carrée que d'un nombre n positif (ou nul).
2. Lorsque a est positif il est toujours possible de trouver un tel nombre x et d'autre part il est unique (puisque positif). Nous devrons attendre de bien connaître les fonctions pour pouvoir prouver cette existence (ou même attendre après le bac).
3. Sauf si $n \in \mathbb{N}$ est un carré parfait $(1, 4, 9, \dots)$, $\sqrt{n}$ est un nombre qui n'est pas rationnel. Dans ce cas il n'y a pas d'écriture exacte du nombre plus simple que $\sqrt{n}$.
4. Clairement : si a est positif $\sqrt{a}^2 = \sqrt{a^2} = a$.
   Par contre si $a < 0$ alors $\sqrt{a}^2$ n'existe pas, et $\sqrt{a^2} = -a$.
   Quel que soit le signe de a nous pourrons écrire : $\sqrt{a^2} = |a|$.

II Propriétés algébriques.

Proposition 1 - Propriétés algébriques de racine carrée.

Soient :

. $a \in [0; +\infty[$,

. $b \in [0; +\infty[$,

. $n \in \mathbb{Z}$.

(i) $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

(ii) Si $b \neq 0$ alors : $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

(iii) $\sqrt{a}^n = \sqrt{a^n}$.

Démonstration

(i) Soit a et b des entiers naturels.

Démontrons que $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est la racine carrée de ab.

Vérifions que le nombre $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est effectivement un nombre positif qui élevé au carré égale ab.

* Par définition de la racine carrée $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif.
*

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 &= \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) \times \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) \\
&= \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\
&= \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} \\
&= \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2
\end{aligned}$$

Par définition de la racine carré (a et b étant positifs), $\sqrt{a}^2 = a$ et $\sqrt{b}^2 = b$ donc :

$$\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = a \times b$$

Nous avons démontré que quelques soient les entiers naturels a et b, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

(ii) Il suffit de démontrer que $\frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{b}}$.

(iii) En itérant la formule du (i).

■

Exemples.

1. $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$.
2. $\sqrt{75} = \sqrt{3 \times 25} = \sqrt{3} \times \sqrt{25} = \sqrt{3} \times 5 = 5\sqrt{3}$.
3. $\sqrt{500} = \sqrt{2^2 \times 5^3} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{5^2 \times 5} = 2 \times \sqrt{5^2} \times \sqrt{5} = 2 \times 5\sqrt{5}$.
4. D'une part $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ et d'autre part $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ donc $\sqrt{16 + 9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$. Ce contre-exemple établit, qu'en général : $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Remarques.

1. Pas de formule générale pour addition et soustraction.
2. Du point de vu des priorités opératoires la racine carrée joue le même rôle que les parenthèses, les crochets, ou les barres de fraction : ce qui est sous la racine carré est considéré comme entre parenthèses.

III Exercices.

Exercice 1. B

Déterminez (à l'aide de la calculatrice) une valeur exacte puis, éventuellement, une valeur approchée, de $\sqrt{121}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{2}$.

Exercice 2. C

Justifiez les égalités.

a) $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

b) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

c) $4\sqrt{27} = 12\sqrt{3}$.

d) $-\sqrt{32} = -4\sqrt{2}$.

Exercice 3. C

Écrivez chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.

a) $A = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$.

b) $B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{144}}$.

c) $C = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

d) $D = 2\sqrt{3} + \sqrt{\frac{49}{3}}$.

Exercice 4. C

Écrivez chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ où $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$, b étant le plus petit possible.

a) $A = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$.

b) $B = 7\sqrt{6} - 9\sqrt{6}$.

c) $C = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$.

d) $D = -\sqrt{7} - 4\sqrt{7}$.

e) $E = 3\sqrt{27}$.

f) $F = -\sqrt{8}$.

g) $G = 5\sqrt{12}$.

h) $H = -3\sqrt{98}$.

i) $I = \sqrt{15} \times \sqrt{20}$.

j) $J = \sqrt{24} \times \sqrt{2}$.

k) $K = \sqrt{8} \times \sqrt{56}$.

l) $L = \sqrt{\dfrac{5}{16}}$.

m) $M = \sqrt{\dfrac{24}{2}}$.

n) $N = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}}$.

o) $O = \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}}$.

p) $P = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{300}$.

q) $Q = 3\sqrt{5} - \sqrt{20} - 3\sqrt{45}$.

r) $R = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$.

s) $S = \dfrac{21}{\sqrt{7}}$.

t) $T = \dfrac{9}{\sqrt{3}}$.

u) $U = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Exercice 5. C

Écrivez chaque nombre sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où $a, b \in \mathbb{Q}$ et $c \in \mathbb{N}$, c étant le plus petit possible.

a) $A = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2$.

b) $B = \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)$.

c) $C = \left(2\sqrt{3} - 4\right)^2$.

d) $D = \left(2 + 3\sqrt{5}\right)^2$.

Exercice 6. C

Soit $x \in [0; +\infty[$.
Simplifiez les expressions suivantes (oui cet énoncé n'est pas clair, faites au mieux).

a) $A = \sqrt{x^4}$.

b) $B = \sqrt{x^3}$.

c) $C = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$.

d) $D = (x + \sqrt{x})^2$.

e) $E = (x + \sqrt{x})(x - \sqrt{x})$.

Écrivez les expressions suivant sous forme d'une unique expression fractionnaire.

a) $F = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

b) $G = 2 - \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$.