09 Valeur absolue et distance.

I Valeur absolue.

L'idée de la valeur absolue est de ne considérer que des nombres positifs.

Définition 1

On appelle *valeur absolue* la fonction dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$ et qui est définie par

$$x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

La valeur absolue d'un nombre est x se note $|x|$.

Proposition 1

Pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$,

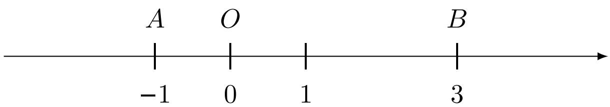
$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

II Distance.

La valeur absolue $|x|$ que vous avez déjà rencontrée au collège vous fut présentée comme la distance, sur la droite numérique, entre 0 et x. Cette idée se généralise et permet de considérer la distance entre deux nombres.

Un écart est une différence (soustraction). Une distance est un nombre positif. Donc pour avoir la distance qui sépare deux nombre on prend la valeur absolue de leur différence. Ainsi la distance (sur la droite numérique) qui sépare 2 et 7 n'est pas $2-7$ mais $|2-7|$. Vous pouvez pensez en centimètres pour soutenir votre compréhension.

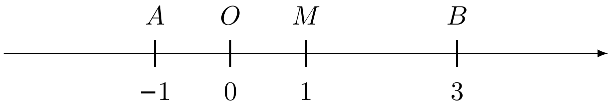
La valeur absolue est un outil commode pour noter la longueur séparant deux points de la droite numérique :



Ici : $AB = |x_A - x_B| = |-1-3| = 4$.

III Valeur absolue et intervalles.

Continuons à faire de la géométrie sur la droite numérique en nous demandant comment trouver l'abscisse du milieu d'un segment $[AB]$.



Intuitivement, en tâtonnant, nous voyons que le milieu M sera le point d'abscisse $x_M = 1$. Comment l'obtenir par le calcul à partir des abscisses x_A et x_B des point A et B ? En faisant la moyenne des abscisses :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Nous appellerons centre de l'intervalle $[a, b]$ le nombre $c = \dfrac{a+b}{2}$ et rayon le nombre $\dfrac{b-a}{2}$. Autrement dit le centre de l'intervalle est le milieu du segment délimité par les points d'abscisses a et b.

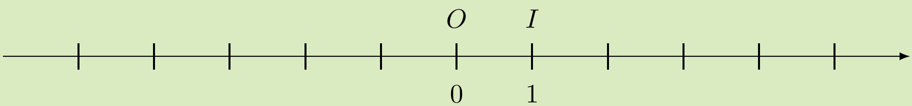
Nous appellerons rayon de l'intevalle sa demi "longueur". Alors $[a, b] = [c - r; c + r]$. Nous pouvons alors décrire autrement l'intervalle

$$x \in [a, b] \text{ équivaut à dire } |r - x| \leqslant r.$$

IV Exercices.

Exercice 1. A

Placez sur la droite numérique les points proposés.



a) A tel que $AO = 4$.

b) B tel que $OB = 2$.

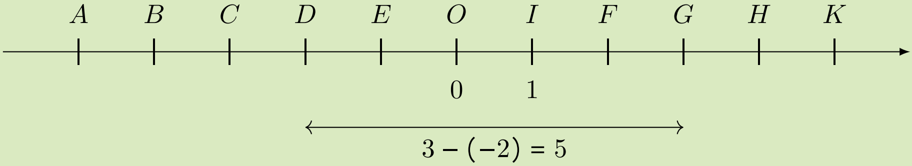
c) C tel que $CO = -2$.

d) D tel que $DO = 1$.

e) E tel que $OE = 3$.

Exercice 2. B

On considère la droite numérique :



Exemple : la distance entre D et G est 5, $DG = 5$.

Lisez les distances proposées.

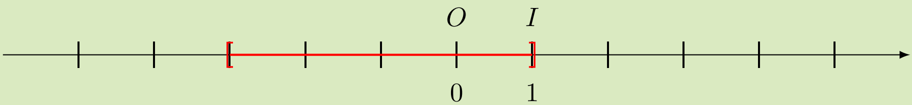
a) FH. b) IK. c) HI. d) DK.

e) BE. f) AI. g) EF. h) CH.

i) FB. j) OB. k) BH. l) HA.

Exercice 3. B

Dessinez sur une droite numérique l'intervalle fermé dont on donne le centre et le rayon.
Exemple : l'intervalle de centre -1 et de rayon 2 est représenté par



a) Centre 1 et rayon 5. b) Centre 3 et rayon 2.

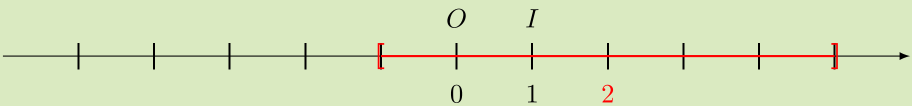
c) Centre -4 et rayon 2. d) Centre -1 et rayon 4.

e) Centre 3 et rayon 3. f) Centre 1 et rayon -3.

g) Centre 0 et rayon 2. h) Centre -3 et rayon 5.

Exercice 4. B

Dessinez sur la droite numérique l'ensemble des points d'abscisses x.
Exemple : si x vérifie $|2 - x| \leqslant 3$ alors



a) $|3 - x| \leqslant 1$. b) $|1 - x| \leqslant 4$. c) $|4 - x| \leqslant 2$.

d) $|x| \leqslant 4$. e) $|x - 5| \leqslant 2$. f) $|x - 3| \leqslant 2$.

g) $|x + 3| \leqslant 2$. h) $|x + 1| \leqslant 4$. i) $|x + 4| \leqslant 1$.

Exercice 5. C

Calculez en détaillant.

a) $A = |4|$.
b) $B = |-1|$.
c) $C = |0|$.
d) $D = |-5|$.
e) $E = |25 + 75|$.
f) $F = |49 - 27|$.
g) $G = |2 - 25|$.
h) $H = |-23 - 18|$.
i) $I = |-4(3 - 12)|$.
j) $J = |3 - 2 \times 3^2|$.
k) $K = 6|4 - 11| - 45$.
l) $L = |28 - 12|^2$.

Exercice 6. C

Déterminez le centre, c, de l'intervalle proposé.

a) $[4; 6]$.
b) $[3; 227]$.
c) $[-8; 12]$.
d) $[-139; -53]$.
e) $[-28; 5]$.
f) $\left[4; \dfrac{1}{3}\right]$.
g) $\left[-\dfrac{2}{7}; -\dfrac{9}{14}\right]$.
h) $\left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{5}{13}\right]$.
i) $\left[\sqrt{17}; -\dfrac{1}{3}\right]$.

Exercice 7. C

Résolvez les inéquations suivantes (en raisonnant géométriquement). Il faut donc donner l'ensemble des solutions.

a) $|4 - x| \leqslant 3$.
b) $|-134 - x| \leqslant 5$.
c) $|10^2 - x| \leqslant -3$.
d) $\left|\dfrac{3}{7} - x\right| \leqslant \dfrac{2}{11}$.
e) $\left|x - 10^3\right| \leqslant \dfrac{10^3}{2}$.
f) $|x + 234| \leqslant 29,5$.
g) $|x + \sqrt{7}| \leqslant -12$.
h) $|-x - 27| \leqslant 14$.

Exercice 8. C

Résolvez les équations suivantes (en raisonnant géométriquement). Il faut donc donner l'ensemble des solutions.

a) $|8 - x| = 5$.
b) $|-56 - x| = 10$.
c) $|3 \times 10^2 - x| = -5 \times 10^{234}$.
d) $\left|\dfrac{9}{5} - x\right| = \dfrac{8}{3}$.
e) $|x - 278| = 200$.
f) $|x + 15| = 18,1$.
g) $|x + 3\sqrt{2}| = -12$.
h) $|-x - 11| = 200$.

Exercice 9. D

Résolvez les inéquations suivantes (en raisonnant géométriquement). Il faut donc donner l'ensemble des solutions.

a) $|12 - x| \geqslant 25$.

b) $|-1 - x| \geqslant 7$.

c) $|10^{12} - x| \geqslant 3 \times 10^{12}$.

d) $\left|\frac{12}{11} - x\right| \geqslant \frac{1}{11}$.

e) $|x - 34| \geqslant \frac{1}{2}$.

f) $|x + 2456,4| \geqslant 12,34$.

g) $|x + \pi| \geqslant 12$.

h) $|-x - 56| \geqslant 4$.

Exercice 10. D

Tracez la courbe représentative de la fonction valeur absolue, $x \mapsto |x|$, sur $[-4; 4]$.

Exercice 11. C

Les points $A(1;2)$, $B(-16;-15)$ et $C(-5;-26)$ sont placés dans un repère orthonormé (O, I, J).
Démontrez que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 12. C

Un repère orthonormé (O, I, J) du plan étant choisi, dîtes si le triangle ABC est rectangle en A dans les cas suivants :

1. $A(2;-1)$, $B(-2;1)$ et $C(1;-3)$.
2. $A(-2;-3)$, $B(3;-2)$ et $C(-4;3)$.
3. $A(-1;2)$, $B(-3;6)$ et $c(-7;1)$.
4. $A(1;3)$, $B(5;1)$ et $C(-1;-1)$.
5. $A(1;5)$, $B(-1;-1)$ et $C(6;3)$.
6. $A(-1;4)$, $B(-2;3)$ et $C(2;1)$.

Exercice 13.

Exercice 14. E