

05 Proportion.

I Définition.

Définition 1

Soient A et E des ensembles finis (contenant un nombre fini d'éléments) tels que $A \subset E$.

On appelle **proportion de A par rapport à E** le nombre appartenant à $[0; 1]$ défini par

$$p := \frac{|A|}{|E|}.$$

où $|A|$ et $|E|$ désignent le nombre d'éléments de A et de E .

Dans l'usage courant les proportions sont exprimées en pourcentage :

$$P = p \times 100.$$

« Appliquer une proportion » c'est multiplier par cette proportion. Ainsi $\frac{1}{3}$ de 18 € c'est $\frac{1}{3} \times 18 \text{ €} = 6 \text{ €}$. Ou encore 20% de 300 l c'est $\frac{20}{100} \times 300 \text{ l} = 60 \text{ l}$.

II Exercices.

Exercice 1. A

On appelle « téléviseur 16/9 » un téléviseur dont la longueur de l'écran est égale aux $\frac{16}{9}$ de sa largeur.

Pour un tel téléviseur, calculer la longueur de l'écran lorsque la largeur est $41,4 \text{ cm}$.

Exercice 2. A

Pour 1080 francs , le père de Pierre a acheté 4 cravates et 3 chemises.

Sachant que le prix d'une cravate est les $\frac{3}{5}$ de celui d'une chemise : quels sont les prix d'une cravate et d'une chemise ?

Exercice 3. A

Dans deux classes de 24 élèves chacun, on demande aux collégiens combien de temps ils passent dans l'autobus pour se rendre au collège (tous prennent l'autobus).

1. Sachant que tous les élèves ont répondu, reproduire et compléter le tableau ci-dessous présentant les résultats de cette enquête :

Temps t en min	$0 \leq t < 15$	$15 \leq t < 30$	$30 \leq t < 45$	$t \geq 45$
Effectif	6	24		3

2. Quel est l'effectif d'élèves passant au moins 30 minutes dans l'autobus pour se rendre au collège ?
3. En déduire le pourcentage d'élèves passant au moins une demi-heure dans l'autobus pour se rendre au collège.

Exercice 4. A

Le tableau ci-dessous indique, en 1982, le bilan des accidents corporel de la circulation dans un pays. Compléter le tableau. Chaque résultat pour les pourcentages sera arrondi au dixième près.

	Nombre des tués	Nombre de blessés légers	Nombre de blessés graves	Nombre total d'accidentés
Effectifs	12 500	321 000	84 500	418 000
Pourcentages				

Exercice 5. A

Dans une classe de première de 35 élèves, 9 élèves font du ski.

Calculez le pourcentage d'élèves de la classe qui font du ski arrondi à 10^{-2} près.

Exercice 6. A

Une salle de spectacle contient 9 000 places assises et 21 000 places debout.

1. Calculez le pourcentage de places assises.
2. Déterminez le pourcentage de places debout.

Exercice 7. B

1. Dans un petit port, les cinq-sixièmes des 720 habitants vivent de la pêche. Combien d'habitants vivent de la pêche ?
2. Dans un village voisin, 697 habitants vivent de l'agriculture, ce qui représente 82% de la population. Combien y a-t-il d'habitants dans ce village ?

Exercice 8. B

Un marchand a des crayons bleus, des crayons rouges et crayons verts. Les crayons bleus représentent 53 % de la totalité des crayons.

Les crayons rouges représentent les $\frac{3}{10}$ de la totalité des crayons.

1. Les crayons verts représentent un pourcentage de la totalité des crayons. Quel est ce pourcentage?
2. En tout le marchand a 300 crayons. Combien a-t-il de crayons bleus ?

Exercice 9. B

1. Une année le taux de réussite au baccalauréat technologique est de 79,7 %, ce qui représente 129 979 candidats reçus.
Calculez le nombre de candidats à cet examen.
2. Dans un lycée le taux de réussite est de 95 %, et il y a eu 12 refusés.
Calculez le nombre de candidats dans ce lycée.

Exercice 10. B

Le salaire brut mensuel de Sophie est de 13 200 €. Les cotisations salariales représentent 23 % du salaire brut.

Calculez le salaire hors cotisations salariales.

Exercice 11. B

Le tableau suivant donne le mode de transport des 1 292 salariés d'une entreprise pour se rendre à leur travail. On note :

- A l'ensemble des employés qui utilisent les transports en commun.
- B l'ensemble des employés qui viennent à pied.
- C l'ensemble des employés qui utilisent leur voiture.
- H l'ensemble des hommes.

	H	\overline{H}
A	210	380
B	52	80
C	450	120

1. Recopiez ce tableau en indiquant le pourcentage d'employés plutôt que le nombre d'employés.
2. Expliquez ce qu'est l'ensemble \overline{H} .
3. Calculez la proportion d'hommes dans l'entreprise.
4. Expliquez ce qu'est $A \cap H$ puis calculez le pourcentage d'employés dans cet ensemble.
5. Expliquez ce qu'est $C \cap \overline{H}$ puis calculez le pourcentage d'employés dans cet ensemble.
6. Expliquez ce qu'est \overline{C} puis calculez le pourcentage d'employés dans cet ensemble.

Exercice 12. B

Un institut de sondage a interrogé 800 personnes de la manière suivante :

- 25 % des personnes interrogées habitent en zone rurale, les autres en zone urbaine ;
- 60 % des personnes interrogées ont été consultées par téléphone, les autres personnes ayant été interrogées en « face à face » par un enquêteur ;
- 55 % des personnes habitant en zone urbaine ont été consultées par téléphone.

1. Reproduisez et complétez le tableau d'effectifs suivant :

	Habitant en zone rurale	Habitant en zone urbaine	Total
Personnes interrogées par téléphone			
Personnes interrogées en « face à face »			
Total	200		800

2. (a) Calculez la proportion de personnes habitant en zone urbaine parmi celles qui ont été consultées par téléphone : donner le résultat sous la forme d'un nombre décimal, puis sous la forme d'un pourcentage.
- (b) Calculez la proportion de personnes habitant en zone urbaine parmi celles interrogées en « face à face » : donner le résultat sous la forme d'un nombre décimal arrondi à 10^{-4} près, puis sous la forme d'un pourcentage.
- (c) L'ordre des proportions (ou fréquences) obtenues en (a) et en (b) est-il le même que celui des effectifs des sous-populations correspondantes ?

Exercice 13. B

Un restaurant sert 600 couverts par service, en proposant un menu à 16 euros et un menu à 24 euros. Pour l'inauguration de son restaurant, le gérant offre à chacun de ses clients soit un café, soit un apéritif.

- 60 % des clients ont choisi un café, les autres un apéritif.
- La moitié des clients ont choisi un menu à 24 euros.
- Parmi ceux qui choisissent le menu à 24 euros, 75 % ont choisi un café.

1. Complétez après l'avoir reproduit le tableau suivant :

	Menu à 16 €	Menu à 24 €	Total
Clients ayant choisi un café			360
Clients ayant choisi un apéritif			
Total			600

2. On note A la sous-population des clients ayant choisi un menu à 16 euros et B la sous-population des clients ayant choisi un apéritif.

(a) Définissez par une phrase les sous-populations $A \cap B$ et $A \cup B$.

Dans ce qui suit les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

- (b) Calculez les proportions (ou fréquences) respectives, notées $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$, des sous-populations A , B , $A \cap B$ et $A \cup B$ dans la population des 600 couverts.
- (c) Calculez $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Que remarquez-vous ?
- (d) On note C la sous-population des clients ayant choisi un café. On note $P(C)$ la proportion de la sous-population C dans la population des 600 couverts.

Les deux sous-populations A et B sont-elles disjointes ?

Même question pour les deux sous-populations B et C .

Calculez $P(B) + P(C)$.

Exercice 14. B

Un magasin vend deux types de téléphones mobiles : des modèles m_1 et des modèles m_2 .

Ce magasin propose deux types de forfait mensuel : un forfait 1 et un forfait 2. Le service commercial effectue une enquête sur un échantillon de 2 000 clients ayant acheté dans ce magasin un téléphone et un seul, et ayant opté pour un seul des forfaits proposés.

Sur les 2 000 clients interrogés, 1 200 ont acheté le modèle m_1 et 960 ont choisi le forfait F_1 .

Parmi les clients ayant acheté le modèle m_1 , 32 % ont pris le forfait F_1 .

1. Complétez après l'avoir reproduit, le tableau d'effectifs suivant :

	Modèle m_1	Modèle m_2	Total
Forfait 1			960
Forfait 2			
Total	1 200		2 000

2. On note F_1 la sous-population des clients interrogés ayant choisi le forfait 1 et M_2 la sous-population ayant choisi le modèle m_2 .

- Calculez, sous la forme d'un nombre décimal, la proportion $P(F_1)$ de clients interrogés qui ont choisi le forfait 1.
- Calculez, sous la forme d'un nombre décimal, la proportion $P(M_2)$ de clients ayant choisi le modèle m_2 .
- Définissez par une phrase en français les sous-populations $F_1 \cap M_2$ et $F_1 \cup M_2$.
- Calculez, sous la forme d'un nombre décimal, la proportion $P(F_1 \cap M_2)$ de clients qui appartiennent à la sous-population $F_1 \cap M_2$ parmi les clients interrogés.
- Déduisez de ce qui précède la proportion $P(F_1 \cup M_2)$ de clients qui appartiennent à la sous-population $F_1 \cup M_2$ parmi les clients interrogés : sous la forme d'un nombre décimal puis sous la forme d'un pourcentage.

Exercice 15. B

Un serveur de films en streaming est composé de 30 % de films d'action et, parmi ces films d'action, 60 % sont des films avec Bruce Willis.

Quelle est la proportion de films avec Bruce Willis sur le serveur ?

Exercice 16. B

Dans une classe 45 % des élèves sont des garçons et $\frac{1}{3}$ des garçons portent des lunettes.

Il y a 3 garçons à lunettes dans la classe.

1. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe?
2. Combien y a-t-il de filles dans cette classe?

Exercice 17. B

Dans une société les cadres représentent 40 % des salariés et les cadres supérieurs représentent un 20 % des cadres.

Quelle est la proportion de cadres supérieurs par rapport aux salariés de cette société?

Exercice 18. B

Une société de téléphonie propose trois mode d'abonnement différents :

- forfait A : moins de 2 h de communication ;
- forfait B : moins de 4 h de communication ;
- forfait C : temps de communication illimité.

La part de clients ayant souscrit le forfait A est de 0,35 et les clients ayant choisi le forfait B représentent la moitié de la clientèle.

De plus 80 % des clients ayant choisi le forfait C ont également choisi l'internet illimité.

1. Quelle est la part de clients ayant choisi le forfait illimité? Exprimez ce résultat en pourcentage.
2. Quelle est la part des clients qui ont choisi un forfait C mais sans l'internet illimité.

Exercice 19. C

Une entreprise est composée de trois services : Administratif, Logistique et Transport. 45 % des employés travaillent au sein du service Administratif et 23 % au sein du service Logistique. Une enquête effectuée sur le temps de trajet quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que :

- 54,2 % des employés résident à moins de 30 min de l'entreprise ;
- 60 % des employés du service Logistique résident à moins de 30 min de l'entreprise ;
- 9,6 % des employés travaillent au sein du service Transport et résident à 30 min ou plus de l'entreprise.

1. Recopiez et complétez le tableau ci-dessous à l'aide des pourcentages donnés dans l'énoncé.

	Service Administratif	Service Logistique	Service Transport	Total
Résidant à moins de 30 min				
Résidant à 30 min ou plus				
Total				100

2. Détermine, au sein du service Administratif, puis au sein du service Transport, la proportion (en %) des employés qui résident à moins de 30 min de l'entreprise.
3. (a) Quel service a la plus forte proportion d'employés qui résident à moins de 30 min de l'entreprise ?
- (b) Quel service a la plus forte proportion d'employés qui résident à 30 min ou plus de l'entreprise ?

Exercice 20. C

L'or pur ne peut être utilisé seul en bijouterie à cause de sa malléabilité. Il est donc mélangé à d'autres métaux, comme l'argent ou le cuivre, qui le rendent plus dur. On obtient ainsi l'or jaune (mélange d'or pur et d'argent) et l'or rose (mélange d'or pur et de cuivre).

La valeur de l'or jaune ou de l'or rose est estimée en fonction de la quantité d'or pur qu'il contient. Cette valeur est de 1 carat lorsque le lingot d'or jaune ou rose contient $\frac{1}{24}$ d'or pur. Par exemple, si la valeur d'un lingot d'or jaune ou rose est de 8 carats, cela signifie que ce lingot contient $\frac{8}{24}$ d'or pur.

Un cours récent des métaux indique :

- le gramme d'or pur : 75 F.
- le gramme d'argent : 25 F.
- le gramme de cuivre : 0,5 F.

1. Le lingot d'or jaune à 18 carats pèse 50 g.

- (a) Quelle fraction d'or pur contient ce lingot d'or jaune ?
- (b) Quelle est la masse d'or pur contenu dans ce lingot ?
- (c) Quelle est la masse d'argent contenu dans ce lingot ?
- (d) Quel est le prix de ce lingot ?

2. Un autre lingot d'or jaune a une masse de 24 g.

On désigne par x la masse (exprimée en g) d'or contenue dans ce lingot.

- (a) Montrez que le prix y (exprimé en F) de ce lingot en fonction de la masse x d'or pur qu'il contient est : $y = 50x + 600$.
- (b) Représentez graphiquement, pour x compris entre 0 et 24, l'application affine f définie par $f(x) = 50x + 600$.

Unités :

- sur l'axe des abscisses 1 cm pour 2 g ;
- sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 100 F.

Exercice 20. (suite)

3. Un lingot d'or rose a une masse de 24 g.

On désigne par x la masse (exprimée en g) d'or pur contenue dans ce lingot.

- Montrer que le prix y (exprimé en F) de ce lingot en fonction de la masse x d'or pur qu'il contient est : $y = 74,5x + 12$.
- Dans le même repère que précédemment, représentez graphiquement, pour x compris entre 0 et 24, l'application affine définie par $g(x) = 74,5x + 12$.

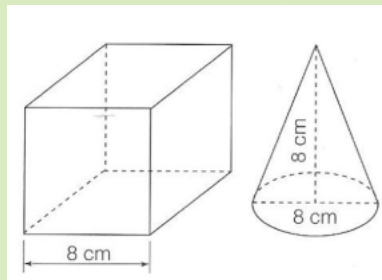
4. Un lingot d'or jaune et un lingot d'or rose pèsent chacun 24 g.

Utilisez le graphique précédent pour répondre aux questions suivantes.

- Si ces lingots contiennent chacun 4 g d'or pur, quelle est la différence de prix entre eux ?
- Si ces lingots valent 1200 F chacun, quelle est la différence d'or pur qu'ils contiennent ?

Exercice 21. C

Un cube a une arêtes de 8 cm. Un cône de révolution a une base de 8 cm de diamètre et une hauteur de 8 cm.



- Calculez le volume du cube.
- Calculez la valeur exacte du volume du cône.
 - Quel est le volume du cône arrondi au cm^3 ?
- On place le cône à l'intérieur du cube. Occupe-t-il plus de 30 % du volume du cube ? Justifiez votre réponse.

Exercice 22. D

Vrai ou faux ?

Armelle et Boris ne suivent pas les mêmes enseignements. La semaine 1, Armelle a réussi 50 % des exercices qu'elle a traités et Boris 90 % des exercices qu'il a traités. La semaine 2, Armelle a réussi 20 % des exercices qu'elle a traités et Boris 40 % des exercices qu'il a traités.

Sur l'ensemble de la quinzaine, Boris a nécessairement réussi un plus grand pourcentage d'exercices traités qu'Armelle.

