04 Vecteurs et translations.

I Définition du vecteur.

II Égalité de représentants.

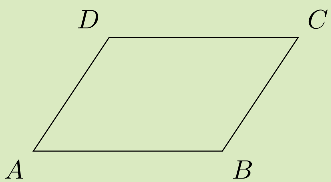
III Somme de vecteurs.

IV Exercices.

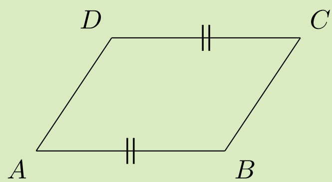
Exercice 1. A

Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.

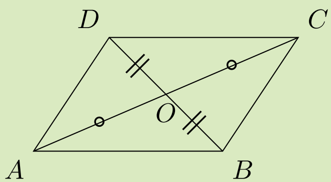
a)



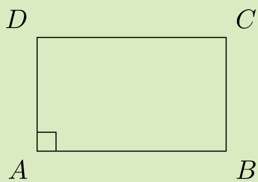
b)



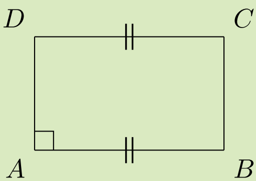
c)



d)



e)



Correction de l'exercice 1

a) Non. b) Non. c) Oui.

d) Non. e) Non.

Exercice 2. A

Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.

1. Le quadrilatère $ABCD$ à deux angles opposés de même mesure.
2. $ABCD$ à des côtés opposés parallèles deux à deux.
3. Le trapèze $ABCD$ a deux angles opposés de même mesure.
4. $ABCD$ est un losange.
5. $ABCD$ est non croisé et ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux.
6. $ABCD$ est non croisé et deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
7. $ABCD$ est un rectangle.
8. $ABDC$ est un carré.

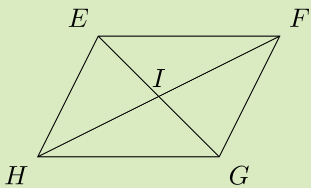
Correction de l'exercice 2

a) Non. b) Oui. c) Oui. d) Oui.

e) Oui. f) Oui. g) Oui. h) Oui.

Exercice 3. B

On considère un parallélogramme $EFGH$ tel que ci-dessous.



1. Donnez un vecteur égale à

   a) $\overrightarrow{EF}$. b) $\overrightarrow{GH}$. c) $\overrightarrow{EH}$. d) $\overrightarrow{GF}$.

2. Complétez par le point qui convient.

   a) $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{I\ldots}$. b) $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{I\ldots}$. c) $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{I\ldots}$.

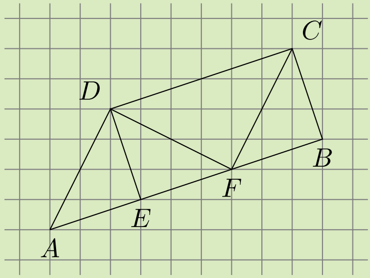
Correction de l'exercice 3

1. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE}$.
2. $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{IF}$ $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{IH}$.

Exercice 4. B

Par lecture graphique indiquez

1. un vecteur égale à $\overrightarrow{AE}$; à $\overrightarrow{CF}$.
2. un vecteur de même direction que $\overrightarrow{CB}$ mais de sens opposé ; idem pour $\overrightarrow{AF}$.
3. un vecteur égale à $\overrightarrow{DC}$ d'extrémité F ; égale à $\overrightarrow{FB}$ d'origine A.
4. deux vecteurs de même de direction, de même sens qui ne sont pas égaux.
5. deux vecteurs de même norme qui ne sont pas égaux.



Correction de l'exercice 4

1. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FB}$. $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DA}$.
2. $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{FE}$.
3. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AE}$.
4. $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DC}$.
5. $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{FC}$.

Exercice 5. B

Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, A et B des points, C et D leurs images respectives par la translation $t_{\vec{u}}$.
Démontrez que $ABDC$ est un parallélogramme.

Exercice 6. B

Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, M et P des points, N l'image de M par la translation $t_{\vec{u}}$, Q un point tel que $MNQP$ soit un parallélogramme.
Démontrez que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.

Correction de l'exercice 6

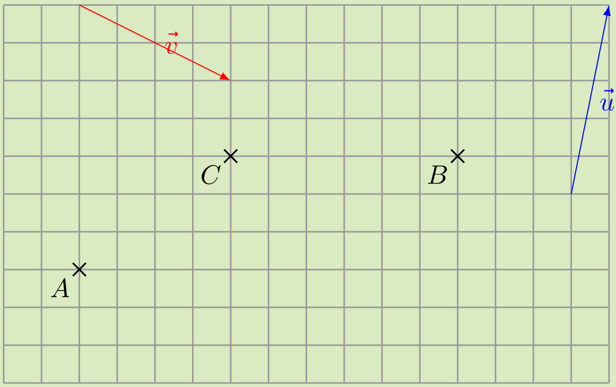
Démontrons : $\overrightarrow{PO} = \vec{u}$.

* $t_{\vec{u}}(M) = N$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$.
* $MNQP$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

Nous déduisons des points précédents par transitivité que

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{u}.$$

Exercice 7. B



Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.

b) Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.

c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.

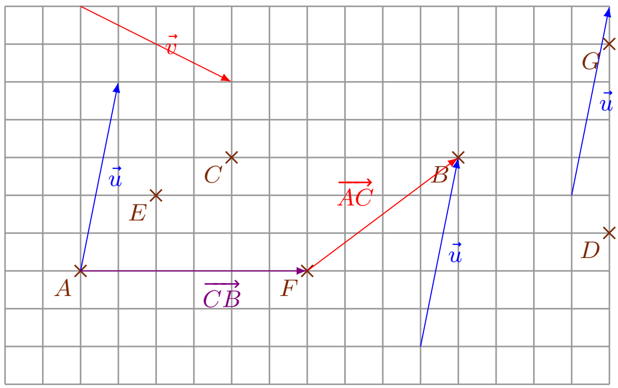
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.

f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.

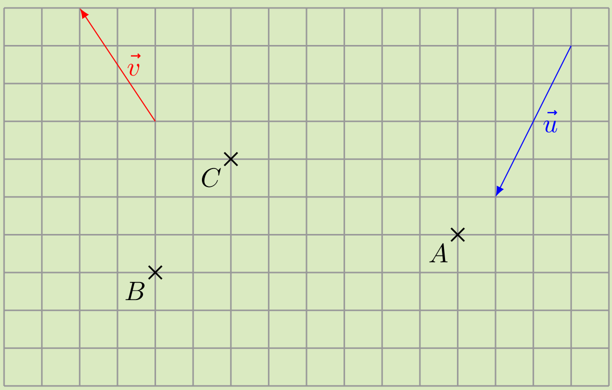
g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.

h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

Correction de l'exercice 7



Exercice 8. B



Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.

b) Le point G tel que $BACG$ soit un parallélogramme.

c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.

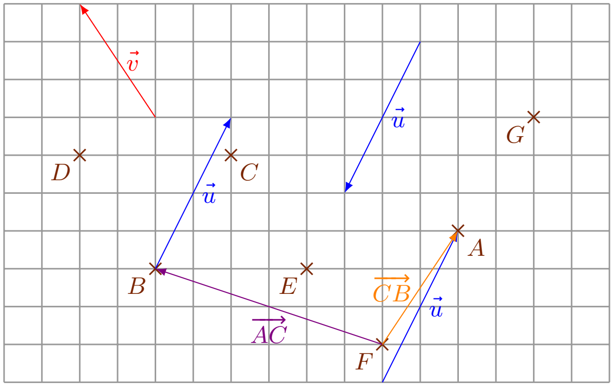
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.

f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.

g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.

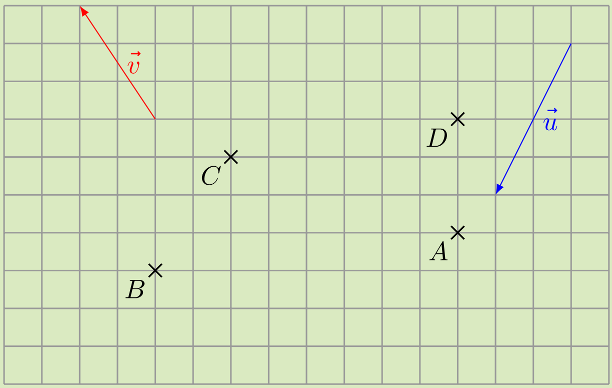
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

Correction de l'exercice 8

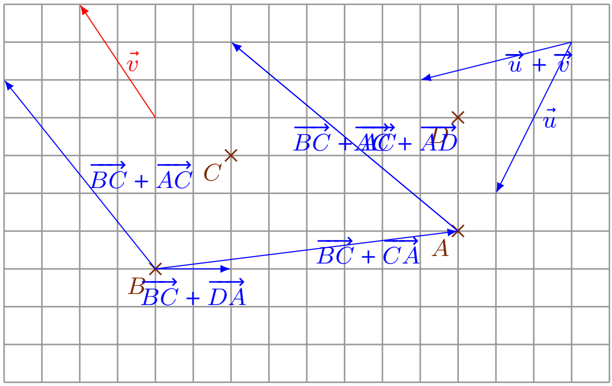


Exercice 9. B

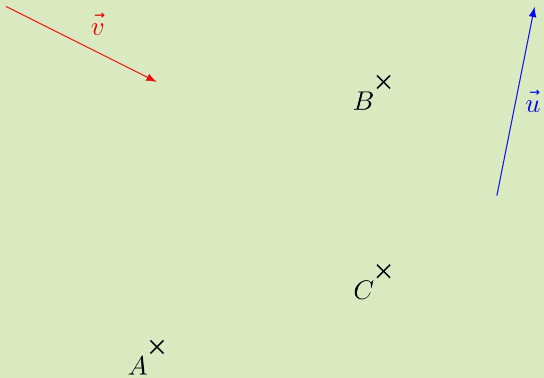
Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$, $\vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.



Correction de l'exercice 9



Exercice 10. C



Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.

b) Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.

c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.

e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.

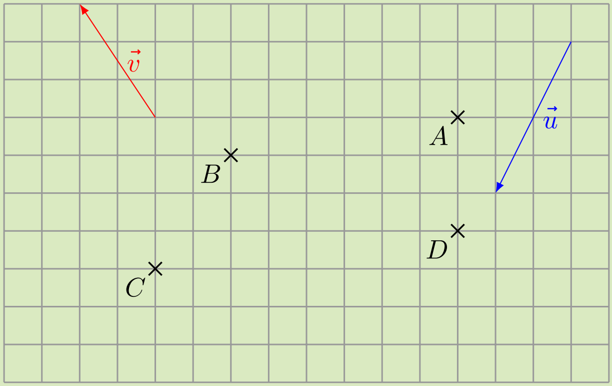
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.

g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.

h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

Exercice 11. C

Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ et $\vec{u} + \vec{v}$.



Exercice 12. C

On considère un parallélogramme $RSTU$ de centre O. On note F l'image du point S par la translation de vecteur $\overrightarrow{UT}$ et E l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{RU}$.
Démontrez que $RSET$ est un parallélogramme.

Correction de l'exercice 12

- $RSTU$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST}$.
- Par construction : $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{FE}$.

Des deux points précédents nous déduisons par transitivité : $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{FE}$. Autrement dit $STEF$ est un parallélogramme.

On en déduit que $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{TE}$.
Or $\overrightarrow{SF} = \overrightarrow{RS}$ donc $\overrightarrow{TE} = \overrightarrow{RS}$.
Autrement dit

$RSET$ est un parallélogramme,

Exercice 13. C

Soient EDF un triangle rectangle en D tel que $ED = 6$ cm et $DF = 4,5$ cm, I et J les milieux respectifs de $[ED]$ et $[DF]$, G et H les images respectives de F et I par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$.

1. Quelle conjecture peut-on émettre pour le point G ?
2. Quelle est la nature de $DJEH$?

Exercice 14. C

Soient ABC un triangle quelconque, I le milieu de $[AB]$, I' l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{I'I}$.
Démontrez que $A'BCA$ est un parallélogramme puis en déduire que $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{IC}$.

Exercice 15. D

En choisissant des points judicieux complétez.

1. $\overrightarrow{AB} + \cdots = \overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{G\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{GI}$
3. $\overrightarrow{\ldots B} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{CG}$
4. $\overrightarrow{BE} + \cdots = \overrightarrow{BD}$
5. $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\ldots F} = \overrightarrow{B\ldots}$
6. $\overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{\ldots A} = \overrightarrow{BA}$
7. $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{G\ldots} = \overrightarrow{B\ldots}$
8. $\overrightarrow{\ldots E} + \overrightarrow{E\ldots} = \overrightarrow{BC}$
9. $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{AC}$
10. $\overrightarrow{O\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{\ldots P}$
11. $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{AG}$

Exercice 16. D

Simplifiez les expressions suivantes (grâce notamment à la relation de Chasles).

a) $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CG}$.

b) $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{CG}$.

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{CG}$.

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

e) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.

f) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$.

Exercice 17. D

Démontrez.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.

c) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$.

d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

e) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

f) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

Exercice 18. E