04 Vecteurs et translations.

I Définition du vecteur.

Nous définirons un *vecteur* $\vec{u}$ comme le déplacement associé à une translation t. Nous dirons que t est *la translation de vecteur* $\vec{u}$ et nous noterons $t_{\vec{u}}$ cette translation.

Si t transforme le point A en un point B alors nous dirons que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de la translation et donc du vecteur $\vec{u}$. Un vecteur (et une translation) ont une infinité de représentant.

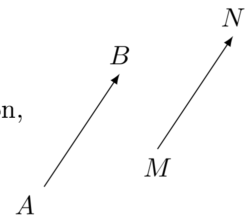
Si $\overrightarrow{MN}$ est un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ alors nous définissons

— la *norme du vecteur* par : $\|\vec{u}\| = MN$,

— la *direction du vecteur* qui est la droite (MN) (ou une autre droite parallèle),

— le *sens du vecteur* $\vec{u}$: de M vers N.

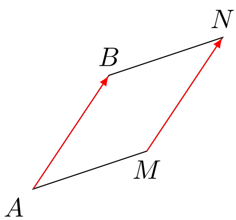
Deux représentants
d'une même translation,
d'un même vecteur.



Pour le représentant $\overrightarrow{MN}$, M est appelé *l'origine* et N est appelé *l'extrémité*.

II Égalité de représentants.

Deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux (représentent la même translation, le même vecteur) si et seulement si $ABNM$ est un parallélogramme.



L'absence de déplacement est représentée par le vecteur $\vec{0}$ qui est appelé *le vecteur nul*. Ainsi $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

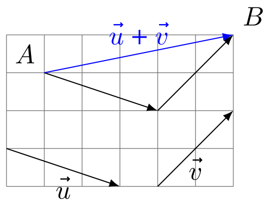
Proposition 1

I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

III Somme de vecteurs.

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$, correspondant à la succession des translations $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

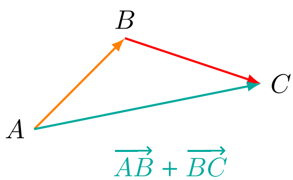
Ci-dessous B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$. Nous pouvons aussi dire que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{u}+\vec{v}$. Autrement dit $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



Proposition 2 - Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points du plan.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Un vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u}+\vec{v} = \vec{0}$ est appelé l'opposé de $\vec{u}$ et on le note $-\vec{u}$.

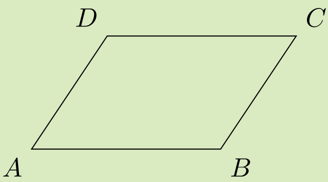
Si $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{u}$ alors $\overrightarrow{BA}$ est un représentant de $-\vec{u}$.

IV Exercices.

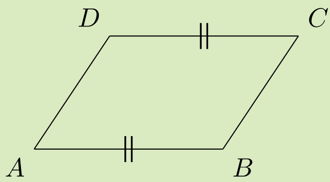
Exercice 1. A

Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.

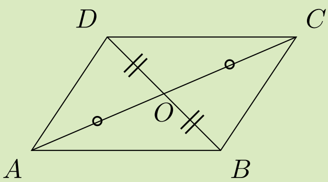
a)



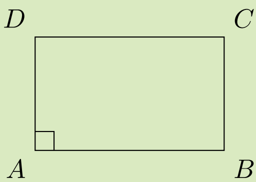
b)



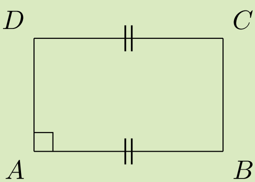
c)



d)



e)



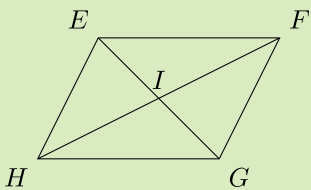
Exercice 2. A

Dites, sans justification, si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dans les cas suivants.

1. Le quadrilatère $ABCD$ à deux angles opposés de même mesure.
2. $ABCD$ à des côtés opposés parallèles deux à deux.
3. Le trapèze $ABCD$ a deux angles opposés de même mesure.
4. $ABCD$ est un losange.
5. $ABCD$ est non croisé et ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux.
6. $ABCD$ est non croisé et deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
7. $ABCD$ est un rectangle.
8. $ABDC$ est un carré.

Exercice 3. B

On considère un parallélogramme $EFGH$ tel que ci-dessous.



1. Donnez un vecteur égale à

   a) $\overrightarrow{EF}$.   b) $\overrightarrow{GH}$.   c) $\overrightarrow{EH}$.   d) $\overrightarrow{GF}$.

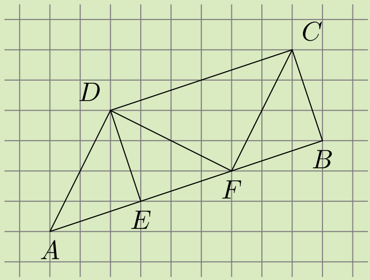
2. Complétez par le point qui convient.

   a) $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{I\ldots}$.   b) $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{I\ldots}$.   c) $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{I\ldots}$.

Exercice 4. B

Par lecture graphique indiquez

1. un vecteur égale à $\overrightarrow{AE}$; à $\overrightarrow{CF}$.
2. un vecteur de même direction que $\overrightarrow{CB}$ mais de sens opposé ; idem pour $\overrightarrow{AF}$.
3. un vecteur égale à $\overrightarrow{DC}$ d'extrémité F ; égale à $\overrightarrow{FB}$ d'origine A.
4. deux vecteurs de même de direction, de même sens qui ne sont pas égaux.
5. deux vecteurs de même norme qui ne sont pas égaux.



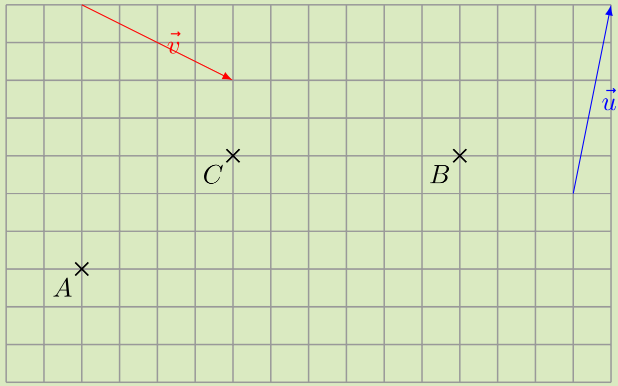
Exercice 5. B

Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, A et B des points, C et D leurs images respectives par la translation $t_{\vec{u}}$.
Démontrez que $ABDC$ est un parallélogramme.

Exercice 6. B

Soient $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$, M et P des points, N l'image de M par la translation $t_{\vec{u}}$, Q un point tel que $MNQP$ soit un parallélogramme.
Démontrez que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$.

Exercice 7. B



Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.

b) Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.

c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.

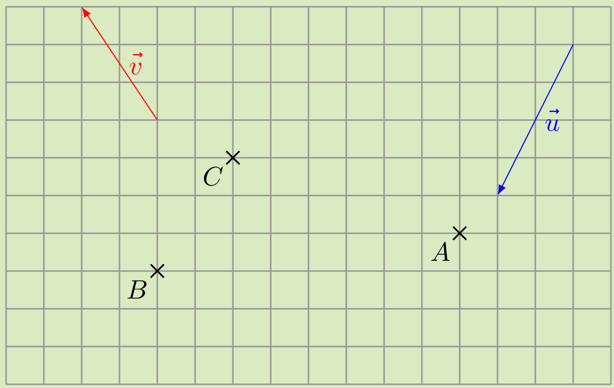
e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.

f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.

g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.

h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

Exercice 8. B



Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.

b) Le point G tel que $BACG$ soit un parallélogramme.

c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.

e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.

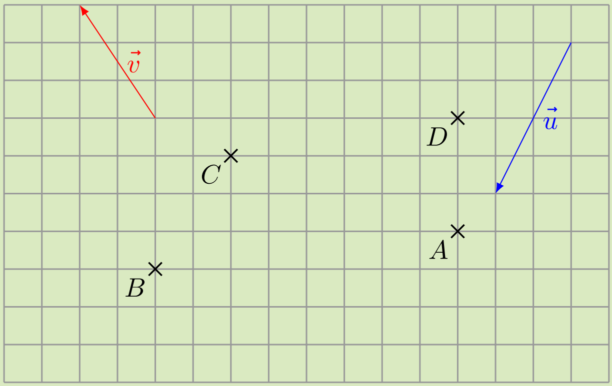
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.

g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.

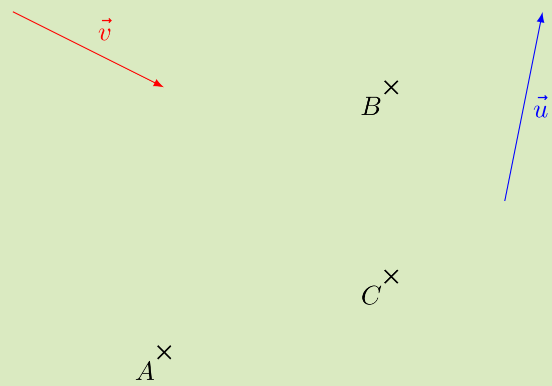
h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

Exercice 9. B

Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$, $\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.



Exercice 10. C



Tracez dans chaque cas.

a) Le point F tel que $ACBF$ soit un parallélogramme.

b) Le point G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme.

c) Le représentant de $\vec{u}$ d'origine A.

d) Le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité B.

e) L'image D de B par la translation de vecteur $\vec{v}$.

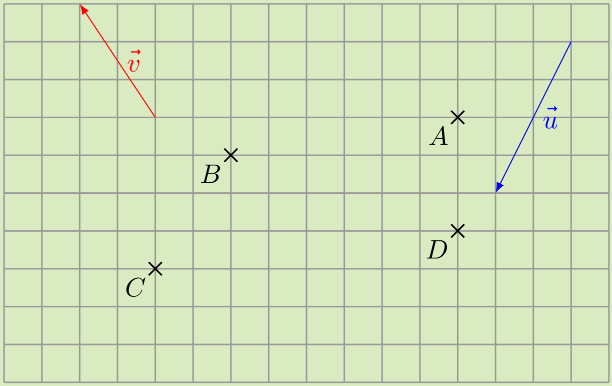
f) Le point E dont C est l'image par la translation de vecteur $\vec{v}$.

g) Le représentant de $\overrightarrow{AC}$ d'extrémité B.

h) Le représentant de $\overrightarrow{CB}$ d'origine A.

Exercice 11. C

Dessinez les vecteurs $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ et $\vec{u}+\vec{v}$.



Exercice 12. C

On considère un parallélogramme $RSTU$ de centre O. On note F l'image du point S par la translation de vecteur $\overrightarrow{UT}$ et E l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{RU}$.
Démontrez que $RSET$ est un parallélogramme.

Exercice 13. C

Soient EDF un triangle rectangle en D tel que $ED = 6$ cm et $DF = 4,5$ cm, I et J les milieux respectifs de $[ED]$ et $[DF]$, G et H les images respectives de F et I par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$.

1. Quelle conjecture peut-on émettre pour le point G ?
2. Quelle est la nature de $DJEH$?

Exercice 14. C

Soient ABC un triangle quelconque, I le milieu de $[AB]$, I' l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, A' l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{I'I}$.
Démontrez que $A'BCA$ est un parallélogramme puis en déduire que $\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{IC}$.

Exercice 15. D

En choisissant des points judicieux complétez.

1. $\overrightarrow{AB} + \cdots = \overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{G\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{GI}$
3. $\overrightarrow{\ldots B} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{CG}$
4. $\overrightarrow{BE} + \cdots = \overrightarrow{BD}$
5. $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\ldots F} = \overrightarrow{B\ldots}$
6. $\overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{\ldots A} = \overrightarrow{BA}$
7. $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{G\ldots} = \overrightarrow{B\ldots}$
8. $\overrightarrow{\ldots E} + \overrightarrow{E\ldots} = \overrightarrow{BC}$
9. $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{AC}$
10. $\overrightarrow{O\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{\ldots P}$
11. $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{AG}$

Exercice 16. D

Simplifiez les expressions suivantes (grâce notamment à la relation de Chasles).

a) $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CG}$.

b) $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{CG}$.

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{CG}$.

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

e) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.

f) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$.

Exercice 17. D

Démontrez.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.

c) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$.

d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

e) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

f) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

Exercice 18. E