

02 Union, intersection et intervalles.

I Ensembles.

Un *ensemble* est un objet mathématique qui regroupe des *éléments* dont aucun n'est en double. Par exemple $\mathbb{R}$ et $[0; 1]$ sont des ensembles.

Lorsqu'un ensemble ne contient que peu d'éléments on le présente avec des accolades. Par exemple $\{-7; 2; 0\}$ est un ensemble qui contient 3 éléments.

Il existe un ensemble qui ne contient aucun objet et qui est appelé *l'ensemble vide*. On le note $\emptyset$.

Quand tous les éléments d'un ensemble A appartiennent, aussi, à un ensemble B alors on dit que *A est inclus dans B* et on note $A \subset B$.

Par exemple $\{-3; a\} \subset \{-3; 2; b; 10^2; a\}$ puisque chaque élément de $\{-3; a\}$ est aussi un élément de $\{-3; 2; b; 10^2; a\}$.

II Union.

L'*union* de deux ensembles A et B est un ensemble qui contient tous les éléments de A ainsi que tous les éléments de B . Le nouvel ensemble obtenu en réunissant A et B est noté $A \cup B$ (qui se lit « A union B »).

Par exemple l'union de $\{1; -3; a\}$ et $\{-3; 2; b; 10^2; a\}$ est

$\{1; -3; a\} \cup \{-3; 2; b; 10^2; a\} = \{1; -3; a; 2; b; 10^2\}$ (dans un ensemble chaque élément n'apparaît qu'une fois).

III Intersection.

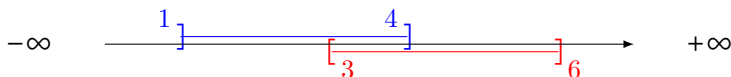
L'*intersection* de deux ensembles A et B est un ensemble qui contient tous les éléments communs à A et à B . Le nouvel ensemble obtenu par intersection de A et B est noté $A \cap B$ (qui se lit « A inter B »).

Par exemple l'intersection de $\{1; -3; a\}$ et $\{-3; 2; b; 10^2; a\}$ est $\{1; -3; a\} \cap \{-3; 2; b; 10^2; a\} = \{-3; a\}$.

IV Dans le cas des intervalles.

Pour déterminer union ou intersection d'intervalles nous nous appuyerons sur une schéma avec la droite numérique.

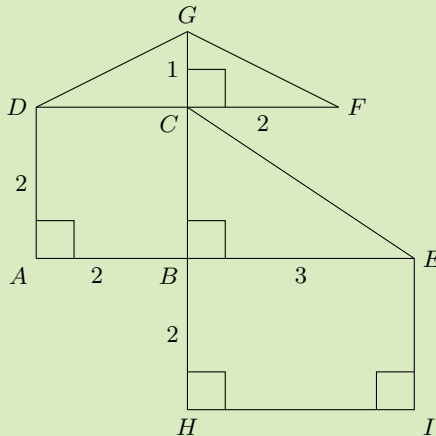
Par exemple pour les intervalles $]1; 4]$ et $[3; 6]$:



Du schéma nous déduisons : $]1; 4] \cap [3; 6] = [3; 4]$ et $]1; 4] \cup [3; 6] =]1; 6]$.

V Exercices.

Exercice 1. A



Calculez les aires délimitées par les polygones : $ABCD$, EBC , $EBHI$, DFG , $ABFC$, $DFIH$.

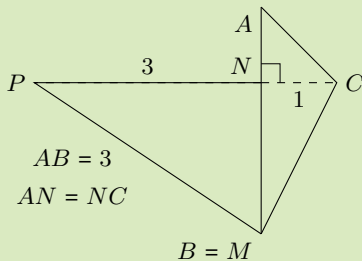
Correction de l'exercice 1

$\mathcal{A}(ABCD) = 4$, $\mathcal{A}(EBC) = 3$, $\mathcal{A}(EBHI) = 6$, $\mathcal{A}(DFG) = 2$, $\mathcal{A}(ABFC) = 4$, $\mathcal{A}(DFIH) = 14$.

Exercice 2. A

Hachurez l'intersection et grisez l'union des triangles (surfaces) ABC et MNP . Calculez les aires de ABC , de MNP puis, si possible de leurs union et intersection.

a)



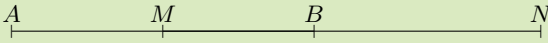
Correction de l'exercice 2

$\mathcal{A}(ABC) = \frac{3}{2}$, $\mathcal{A}(MNP) = 3$.

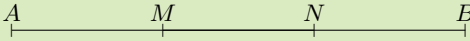
Exercice 3. A

Dessinez en rouge l'union des segments $[AB]$ et $[MN]$.

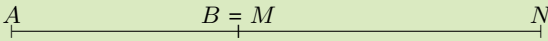
a)



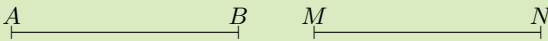
b)



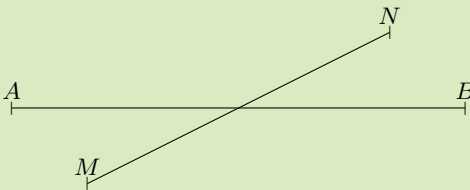
c)



d)



e)



Exercice 4. A

Dessinez en rouge l'intersection des segments $[AB]$ et $[MN]$.

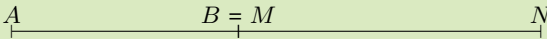
a)



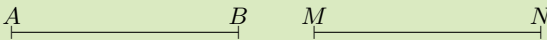
b)



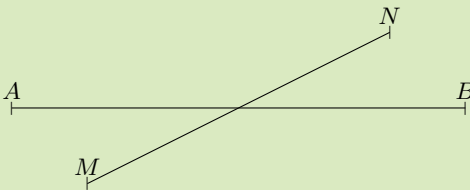
c)



d)



e)



Exercice 5. B

Simplifiez si possible l'écriture des ensembles suivants.

a) $[-3; 4[\cup]-1; 5[.$

b) $[2; 7] \cup [5; 13].$

c) $] -1; 3] \cap]2; 4].$

d) $] -3; 2] \cup [3; 5].$

e) $] -13; 7] \cap [7; 17].$

f) $] -12; -11[\cap [-11; -3[.$

g) $] -\infty; 5] \cap [3; 7].$

h) $] -\infty; 0] \cup [0; +\infty[.$

Correction de l'exercice 5

a) $[-3; 4[\cup]-1; 5[= [-3; 5[.$

b) $[2; 7] \cup [5; 13] = [2; 13].$

c) $] -1; 3] \cap]2; 4] =]2; 4].$

d) $] -3; 2] \cup [3; 5]$ pas de simplification d'écriture.

e) $] -13; 7] \cap [7; 17] = \{7\}.$

f) $] -12; -11[\cap [-11; -3[= \emptyset.$

g) $] -\infty; 5] \cap [3; 7] = [3; 5].$

h) $] -\infty; 0] \cup [0; +\infty[= \mathbb{R}.$

Exercice 6. C

Notons R l'ensemble des rectangles et L celui des losanges. Qu'est-ce que $R \cap L$?

Correction de l'exercice 6

$R \cap L$ est l'ensemble des carrés.

Exercice 7. C

Déterminez les intersections et unions des ensembles E et F dans les cas suivants.

- | | |
|---|---|
| a) $E = \{1; 4; -1\}$ et $F = \{-6; 1; 4\}$. | b) $E = \{1; 2\}$ et $F = \{3; 4\}$. |
| c) $E = [-2; 3]$ et $F = [1; 7]$. | d) $E =]-\infty; -3]$ et $F =]-6; 2[$. |
| e) $E =]-\infty; 5]$ et $] - 6; +\infty[$. | f) $E =]2; 6]$ et $F = [3; 4]$. |
| g) $E = [2; +\infty[$ et $F = [0; 2[$. | h) $E =]-\infty; 1]$ et $F = [1; 4[$. |
| i) $E = \{2; 3\}$ et $F = [1; 3[$. | j) $E = \{0\}$ et $F =]-1; 1[$. |
| k) $E = [1; 4[$ et $F = \mathbb{Z}$. | l) $E =]-\infty, 5[$ et $F = \mathbb{N}$. |

Correction de l'exercice 7

- a) $\{1; 4; -1\} \cap \{-6; 1; 4\} = \{1; 4\}$ et $\{1; 4; -1\} \cup \{-6; 1; 4\} = \{1; 4; -1; -6\}$.
- b) $\{1; 2\} \cap \{3; 4\} = \emptyset$ et $\{1; 2\} \cup \{3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$.
- c) $[-2; 3] \cap [1; 7] = [1; 3]$ et $[-2; 3] \cup [1; 7] = [-2; 7]$.
- d) $] - \infty; -3] \cap] - 6; 2[=] - 3; -6]$ et $] - \infty; -3] \cup] - 6; 2[=] - \infty; 2[$.
- e) $] - \infty; 5] \cap] - 6; +\infty[=] - 6; 5]$ et $] - \infty; 5] \cup] - 6; +\infty[= \mathbb{R}$.
- f) $]2; 6] \cap [3; 4] = [3; 4]$ et $]2; 6] \cup [3; 4] =]2; 6]$.
- g) $[2; +\infty[\cap [0; 2[= \emptyset$ et $[2; +\infty[\cup [0; 2[= [0; +\infty[$.
- h) $] - \infty; 1] \cap [1; 4[= \{1\}$ et $] - \infty; 1] \cup [1; 4[=] - \infty; 4[$.
- i) $\{2; 3\} \cap [1; 3[= \{2\}$ et $\{2; 3\} \cup [1; 3[= [1; 3]$.
- j) $\{0\} \cap]-1; 1[= \{0\}$ et $\{0\} \cap]-1; 1[=]-1; 1[$.
- k) $[1; 4[\cap \mathbb{Z} = \{1; 2; 3\}$ et pas de simplification d'écriture pour $[1; 4[\cup \mathbb{Z}$.
- l) $] - \infty, 5[\cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ et pas de simplification d'écriture pour $] - \infty, 5[\cup \mathbb{N}$.

