02 Union, intersection et intervalles.

I Ensembles.

Un *ensemble* est un objet mathématique qui regroupe des *éléments* dont aucun n'est en double. Par exemple $\mathbb{R}$ et $[0;1]$ sont des ensembles.

Lorsqu'un ensemble ne contient que peu d'éléments on le présente avec des accolades. Par exemple $\{-7;2;0\}$ est un ensemble qui contient 3 éléments.

Il existe un ensemble qui ne contient aucun objet et qui est appelé *l'ensemble vide*. On le note $\varnothing$.

Quand tous les éléments d'un ensemble A appartiennent, aussi, à un ensemble B alors on dit que A est inclus dans B et on note $A \subset B$.

Par exemple $\{-3;a\} \subset \{-3;2;b;10^2;a\}$ puisque chaque élément de $\{-3;a\}$ est aussi un élément de $\{-3;2;b;10^2;a\}$.

II Union.

L'*union* de deux ensembles A et B est un ensemble qui contient tous les éléments de A ainsi que tous les éléments de B. Le nouvel ensemble obtenu en réunissant A et B est noté $A \cup B$ (qui se lit « A union B »).

Par exemple l'union de $\{1;-3;a\}$ et $\{-3;2;b;10^2;a\}$ est

$\{1;-3;a\} \cup \{-3;2;b;10^2;a\} = \{1;-3;a;2;b;10^2\}$ (dans un ensemble chaque élément n'apparaît qu'une fois).

III Intersection.

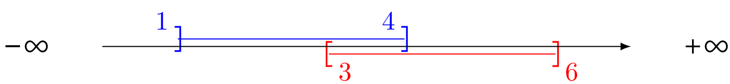
L'*intersection* de deux ensembles A et B est un ensemble qui contient tous les éléments commun à A et à B. Le nouvel ensemble obtenu par intersection de A et B est noté $A \cap B$ (qui se lit « A inter B »).

Par exemple l'intersection de $\{1;-3;a\}$ et $\{-3;2;b;10^2;a\}$ est $\{1;-3;a\} \cap \{-3;2;b;10^2;a$
$\{1;-3;a;2;b;10^2\}$.

IV Dans le cas des intervalles.

Pour déterminer union ou intersection d'intervalles nous nous appuierons sur une schéma avec la droite numérique.

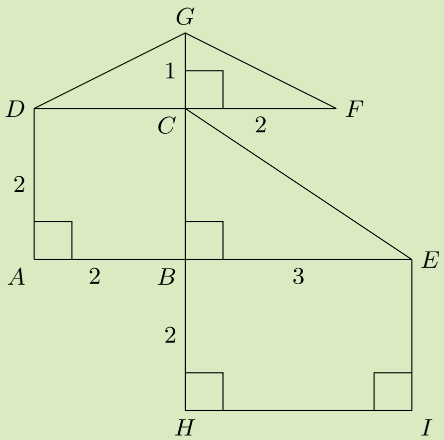
Par exemple pour les intervalles $]1;4]$ et $[3;6]$:



Du schéma nous déduisons : $]1;4] \cap [3;6] = [3;4]$ et $]1;4] \cup [3;6] =]1;6]$.

V Exercices.

Exercice 1. A

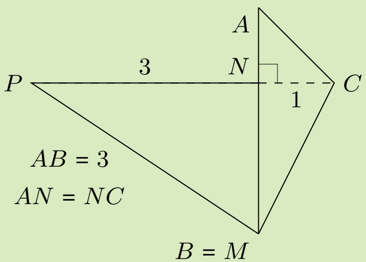


Calculez les aires délimitées par les polygones : $ABCD$, EBC, $EBHI$, DFG, $ABFC$, $DFIH$.

Exercice 2. A

Hachurez l'intersection et grisez l'union des triangles (surfaces) ABC et MNP. Calculez les aires de ABC, de MNP puis, si possible de leurs union et intersection.

a)



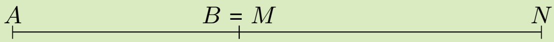
Exercice 3. A

Dessinez en rouge l'union des segments $[AB]$ et $[MN]$.

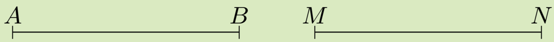
a)

b)

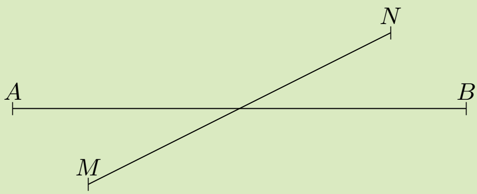
c)



d)



e)



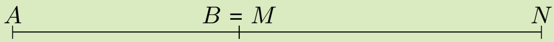
Exercice 4. A

Dessinez en rouge l'intersection des segments $[AB]$ et $[MN]$.

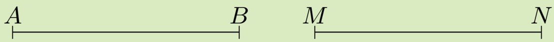
a)

b)

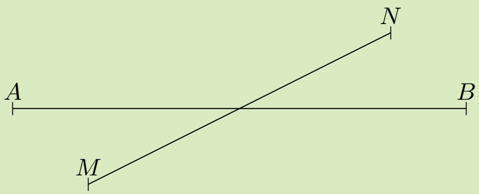
c)



d)



e)



Exercice 5. B

Simplifiez si possible l'écriture des ensembles suivants.

a) $[-3;4[\cup]-1;5[$.

b) $[2;7]\cup[5;13]$.

c) $]-1;3]\cap]2;4]$.

d) $]-3;2]\cup[3;5]$.

e) $]-13;7]\cap[7;17]$.

f) $]-12;-11[\cap[-11;-3[$.

g) $]-\infty;5]\cap[3;7[$.

h) $]-\infty;0]\cup[0;+\infty[$.

Exercice 6. C

Notons R l'ensemble des rectangles et L celui des losanges. Qu'est-ce que $R\cap L$?

Exercice 7. C

Déterminez les intersections et unions des ensembles E et F dans les cas suivants.

a) $E = \{1;4;-1\}$ et $F = \{-6;1;4\}$.

b) $E = \{1;2\}$ et $F = \{3;4\}$.

c) $E = [-2;3]$ et $F = [1;7]$.

d) $E =]-\infty;-3]$ et $F =]-6;2[$.

e) $E =]-\infty;5]$ et $]-6;+\infty[$.

f) $E =]2;6]$ et $F = [3;4]$.

g) $E = [2;+\infty[$ et $F = [0;2[$.

h) $E =]-\infty;1]$ et $F = [1;4[$.

i) $E = \{2;3\}$ et $F = [1;3[$.

j) $E = \{0\}$ et $F =]-1;1[$.

k) $E = [1;4[$ et $F = \mathbb{Z}$.

l) $E =]-\infty,5[$ et $F = \mathbb{N}$.