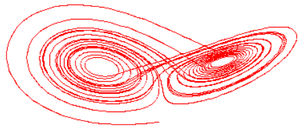
Modélisation et équiprobabilité.

I Expérience aléatoire.

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat (ou *issue*) ne peut être connu à l'avance.

Parfois les systèmes dynamiques déterministes très sensibles aux conditions initiales ne sont pas prévisibles par des moyens déterministes. Il faut alors utiliser des modélisations probabilistes. On parle de système chaotique et de *théorie du chaos*.



Attracteur de Lorentz.

À l'origine de cette théorie nous retrouvons Henri Poincaré qui découvrit cette problématique en essayant de modéliser les attractions gravitationnelles entre 3 corps ou plus. Sont associés à cette théorie de nombreux mathématiciens, notamment ceux qui ont travaillé sur des équations différentielles (équations dont l'inconnue est une fonction) comme Cauchy ou Lipschitz.

La météorologie est un exemple d'étude de système chaotique et le météorologue Lorentz intitula une de ses conférences d'une expression qui fit florès « Prédictibilité : le battement d'aile d'un papillon au Brésil provoque-t-il une tornade au Texas ? ».

Comme pour toute expérience il faut définir un *dispositif expérimental*. Il s'agit de décrire l'expérience et les conditions dans lesquelles elle est réalisée ainsi que ce qu'il faut observer (issues).

II Généralités sur la modélisation.

Loi de probabilité.

Si on recommence un grand nombre (en théorie une infinité) de fois une expérience aléatoire la fréquence d'apparition d'une issue, ω, s'approche d'une valeur fixe qui est appelée *la probabilité de l'issue* et notée $\mathbb{P}(\omega)$.

Les probabilités de toutes les issues forment la *loi de probabilité* ou *distribution de probabilité*.

Événement.

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé *l'univers* et est noté Ω. La fréquence d'apparition de toutes les issues est de 1 donc : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Pour un lancer de dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, les issues sont les entiers de 1 à 6. On note alors : $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$

Un événement est un sous-ensemble de *l'univers*.

$\{1\ ;\ 4\}$ est un événement puisque c'est un sous-ensemble de $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.

Un événement A peut être présenté par :

— une propriété A :« Les issues telles que ... »,

— un sous-ensemble : $A = \{\dots\}$.

L'événement A :« Les issues sont des nombres pairs » peut aussi s'écrire : $A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$.

L'événement $B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$ peut être décrit par B :« Les issues sont des nombres strictement supérieurs à 2 ».

Les événements $\varnothing$ et Ω sont respectivement appelés les événements *impossible* et *certain*.

Définition 1

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qu'il contient.

Exercice 1.

On lance un dé pipé.
Le tableau suivant regroupe les probabilités.

F	1	2	3	4	5	6
$p(F)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	?

1. Calculer $p(6)$.
2. Calculer la probabilités des événements suivants.
   (a) « La face obtenue est paire » ;
   (b) « la face obtenue est supérieur ou égale à 5 ».

Correction exercice 1

1. Calculons $\mathbb{P}(6)$.

   La probabilité de l'univers est 1.

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

équivaut successivement à :

$$\mathbb{P}(\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}) = 1$$

la probabilité d'un événement égalant la somme des probabilités des issues qui le réalise :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) &= 1 \\ 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}3 + \mathbb{P}(\{6\}) &= 1 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation linéaire :

$$\mathbb{P}(\{6\}) = 1 - 0{,}9$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\{6\}) = 0{,}1.}$$

2. (a) Notons A : « la face obtenue est paire ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{2; 4; 6\}) \\ &= \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 0{,}4.}$$

3. B : « la face obtenue est supérieure ou égale à 5 ».

   Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\{5; 6\}) \\ &= \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= 0{,}3 + 0{,}1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = 0{,}4.}$$

Réunion et intersection d'événements.

L'événement $A \cup B$ (obtenu par la réunion des sous-ensembles A et B) contient les issues contenues dans A *ou* dans B.

$A = \{2 ; 4 ; 6\}$ et $B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ donc les issues contenues dans A ou dans B forment le sous-ensemble : $A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

L'événement $A \cap B$ (obtenu par l'intersection des sous-ensembles A et B) contient les issues contenues dans A *et* dans B (simultanément).

$A = \{2 ; 4 ; 6\}$ et $B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ donc les issues contenues dans A et dans B forment le sous-ensemble : $A \cap B = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Proposition 1

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Des événements A et B sont dits *incompatibles* si et seulement si $A \cap B = \varnothing$. Remarquons que si A et B sont incompatibles alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

« Obtenir un nombre pair » et « Obtenir un nombre impair » sont des événements incompatibles.

Événement contraire.

Étant donné un événement E, *l'événement contraire* de E, noté $\overline{E}$, est formé de toutes les issues qui ne sont pas dans E.

Puisque $B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ et $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ il en découle que $\overline{B} = \{1 ; 2\}$

Proposition 2

Soit A un événement d'un univers Ω.

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Exercice 2.

Démontrez que $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

Correction exercice 2

Nous savons $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ donc, d'après la précédente proposition :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\varnothing) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{\varnothing}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\Omega) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 3.

Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone. On considère les événements :

- O_1 : « La 1^er^ ligne est occupée ».
- O_2 : « La 2^e^ ligne est occupée ».

Une étude statistique montre que :

- $p(O_1) = 0{,}4$
- $p(O_2) = 0{,}3$
- $p(O_1 \cap O_2) = 0{,}2$

Calculer la probabilité des événements suivants.

1. « La ligne 1 est libre ».
2. « Au moins une des lignes est occupée ».
3. « Au moins une des lignes est libre ».

Correction exercice 3

1. Il s'agit ici d'interpréter les événements proposés avec ceux donnés dans l'énoncé.

   Calculons $\mathbb{P}(\overline{O_1})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{O_1}) &= 1 - \mathbb{P}(O_1) \\ &= 1 - 0{,}4\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{O_1}) = 0{,}6.}$$

2. L'expression « Au moins l'une » peut s'exprimer en utilsant la conjonction « ou » et par conséquent par l'union.

   Calculons $\mathbb{P}(O_1 \cup O_2)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(O_1 \cup O_2) &= \mathbb{P}(O_1) + \mathbb{P}(O_2) - \mathbb{P}(O_1 \cap O_2)\\ &= 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(O_1 \cup O_2) = 0{,}5.}$$

3. Cette question est nettement moins facile. En réfléchissant comme à la question précédente :

   Calculons $\mathbb{P}(\overline{O_1} \cup \overline{O_2})$.

$$\mathbb{P}(\overline{O_1} \cup \overline{O_2}) = \mathbb{P}(\overline{O_1}) + \mathbb{P}(\overline{O_2}) - \mathbb{P}(\overline{O_1} \cap \overline{O_2})$$

   $\overline{O_1} \cap \overline{O_2}$ signifie « la première ligne est libre et la seconde aussi ». Nous n'avons pas la possibilité de calculer directement la porbabilité de cet événement. L'événement contraire peut s'exprimer par : « la première ligne est occupée ou la seconde est occupée », autrement dit « au moins une des deux lignes est occupée ». Donc :

$$\begin{aligned}&= 1 - \mathbb{P}(O_1) + 1 - \mathbb{P}(O_2) - \mathbb{P}(\overline{O_1 \cup O_2})\\ &= 1 - 0{,}4 + 1 - 0{,}3 - [1 - \mathbb{P}(O_1 \cup O_2)]\\ &= 1{,}3 - [1 - 0{,}5]\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{O_1} \cup \overline{O_2}) = 0{,}8.}$$

La dernière question de l'exercice introduit et correspond aux lois de De Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

III Exercices avec équiprobabilité.

La loi d'une expérience aléatoire est appelée *l'équiprobabilité* (ou *loi discrète uniforme*) si la distribution de probabilité entre les issues est équitable. Autrement dit toutes les issues ont la même probabilité.

Proposition 3

S'il y a équiprobabilité et que l'univers Ω comporte $n \in \mathbb{N}^*$ issues, alors la probabilité de l'une quelconque des issues est

$$\frac{1}{n}.$$

Exercice 4.

Un jeu consiste à lancer un dé parfaitement équilibré dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Quel est l'univers de l'expérience ?
2. Calculez la probabilité d'obtenir 3.
3. Calculez la probabilité de l'événement $B = \{3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.
4. Calculez la probabilité de l'événement A :« Les issues sont des nombres pairs ».
5. Décrivez par un ensemble l'événement $A \cap B$ et déduisez en sa probabilité.
6. Déduisez des trois questions précédentes la probabilité de $A \cup B$.
7. Calculez la probabilité de $\overline{A}$.

Correction exercice 4

1. Rechercher ce que sont les issues. Qu'observe-t-on à l'issue de l'expérience ? Qu'est-ce qui correspond à une situation d'équiprobabilité ? Puis recensement de toutes les issues.

   Une issue est un entier entre 1 et 6 donc :

   $$\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}.$$

2. Recherche dans le dispositif expérimental des indicateurs concernant une éventuelle équiprobabilité : « parfaitement équilibré ».

   L'expérience est régie par loi d'équiprobabilité puisque le dé est parfaitement équilibré et l'univers contient 6 issues donc la probabilité d'une issue est :

   $$\mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{6}.$$

3. Déterminons $\mathbb{P}(B)$.

   La rédaction qui suit n'est pas celle que nous utiliserons habituellement.

   Par définition de la probabilité d'un événement et puisque $B = \{4;\ 4;\ 5;\ 6\}$:

   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\})$$

Il y a équiprobabilité et l'univers comporte 6 issues donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\\ &= 4\times\frac{1}{6}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$.

Nous retiendrons le résultat suivant que nous utiliserons souvent dans les exercices

Corollaire 1

S'il y a équiprobabilité et que l'univers comporte $n \in \mathbb{N}^*$ issues alors la probabilité d'un événement A réalisé par k issues (donc $k \leq n$) est

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

4. Calculons $P(A)$.

L'événement nous est présenté par une propriété il faut le traduire par un sous-ensemble de l'univers. ♡

$A = \{2\ ;\ 4\ ;\ 6\}$.

— Il y a équiprobabilité.
— L'univers comporte 6 issues.
— A est réalisé par 3 issues.

Donc :

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

5. Calculons $P(A \cap B)$.

— Il y a équiprobabilité.
— L'univers comporte 6 issues.
— $A \cap B$ est formé des issues qui réalisent à la fois A et B. Il faut donc trouver les éléments communs aux deux ensembles.
  $A \cap B = \{4\ ;\ 6\}$ donc $A \cap B$ est réalisé par 2 issues.

donc :

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

6. Calculons $P(A \cup B)$.

$A \cup B$ est formé des issues qui réalisent A ou B (au moins l'un des deux). Il faut donc trouver les éléments des deux ensembles.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}.$$

7. Calculons $P(\overline{A})$.

   $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$$

Exercice 5.

Un jeu consiste a lancer deux dés cubiques parfaitement équilibrés numérotés de 1 à 6.

1. Donnez sous forme d'un tableau l'univers associé à cette expérience.
2. Calculez la probabilité d'obtenir 6 sur les deux dés.
3. On note A : « La somme des nombres obtenus égale 3 ». Calculez la probabilité de l'événement A.
4. On note B : « le produit des nombres obtenus égale 6 ». Calculez la probabilité de l'événement B.
5. On note C : « le produit des nombres obtenus égale 7 ». Calculez la probabilité de l'événement C.
6. On note D : « la somme des nombres obtenus est strictement supérieure à 3 ». Calculez la probabilité de l'événement D.

Correction exercice 5

1. Lorsque les résultats d'une expérience aléatoire comme ici sont formés de deux données (un nombre pour chaque dé) il est souvent intéressant de représenter l'expérience par un tableau double-entrée comme ci-dessous.

   Cependant les arbres probabilistes peuvent aussi être utilisés et permettent de représenter davantage de situations que le tableau double-entrée.

	1	2	3	4	5	6
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	$(2;5)$	$(2;6)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	$(3;5)$	$(3;6)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	$(4;5)$	$(4;6)$
5	$(5;1)$	$(5;2)$	$(5;3)$	$(5;4)$	$(5;5)$	$(5;6)$
6	$(6;1)$	$(6;2)$	$(6;3)$	$(6;4)$	$(6;5)$	$(6;6)$

Ainsi l'univers est formé de 36 couples correspondant aux résultats obtenus sur les deux dés.

2. L'événement dont il est questio n'ayant pas de nom nous allon lui en donné un. Notons E : « obtenir 6 sur les deux dés ».

   Calculons $\mathbb{P}(E)$.

   $E = \{(6;6)\}$.
   Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et E est réalisé par une issue donc

   $$P(E) = \frac{1}{36}.$$

3. Déterminons les sommes associées à chaque issue sous forme d'un tableau.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   $A = \{(1;2),(2;1)\}$.
   Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et A est réalisé par 2 issues donc $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{36}$.

   $$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{18}.$$

   Pour cette question nous arions pu choisir une modélisation alternative.
   En choisissant comme issue la somme des nombres sur les deux faces nous obtenons comme univers : $\Omega = \{2; 3; 4; \ldots; 11; 12\}$. Et la loi de probabilité correspondante est alors :

Issues	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Proba	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

   Remarquons tout de même que pour faire cette modélisation nous avons en fait utilisé de façon implicite l'équiprobabilité de la précédente modélisation.

4. Déterminons les sommes associées à chaque issue sous forme d'un tableau.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$B = \{(1;6),(2;3),(3;2),(6;1)\}$.
Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et B est réalisé par 4 issues donc $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{36}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{1}{9}.}$$

5. Calculons $\mathbb{P}(C)$.

   $C = \varnothing$.
   Peu importe la loi de probabilité dans ce cas puisqu'il s'agit d'un événement impossible :

   $$\boxed{\mathbb{P}(C) = 0.}$$

6. Calculons $\mathbb{P}(D)$.

   L'événement D rassemblant de nombreuses issues nous préférerons (mais ce n'est pas une obligation) considérer un événement contraire.

   $\overline{D}$: « la somme est inférieure (ou égale) à 3 » donc : $\overline{D} = \{((1;1)\}$.
   Il y a équiprobabilité, l'univers comporte 36 issues et $\overline{D}$ est réalisé par 1 issues donc $\mathbb{P}\left(\overline{D}\right) = \frac{1}{36}$.
   Donc : $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{D}\right) = 1 - \frac{1}{36}$.

   $$\boxed{\mathbb{P}(D) = \frac{35}{36}.}$$

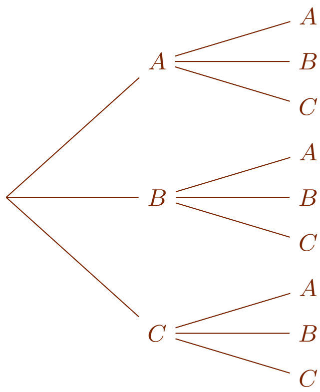
Exercice 6.

Un square est équipé de trois bancs. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard. L'objet de l'exercice est de déterminer la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte.
Les trois bancs sont notés A, B et C.

1. Représentez la situation par un arbre.
2. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient sur le banc A.
3. Calculez la probabilité que les deux personnes s'assoient côte à côte.

Correction exercice 6

1.



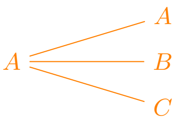
Ainsi $\Omega = \{AA; AB; AC; BA; BB; BC; CA; CB; CC\}$.

Un peu de vocabulaire sur les arbres.

— Les lettres sont appelés des *nœuds* : ici A, B et C sont des nœuds. Le premier nœud n'est pas désigné par une lettre et est appelé la racine de l'arbre.

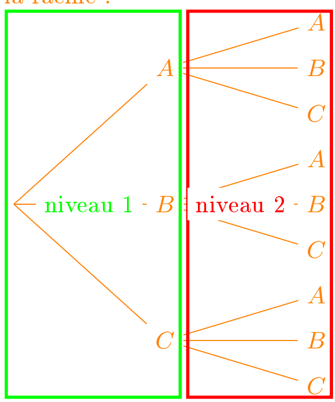
— Les segments qui relient deux nœuds sont appelés des *branches* : A ——— B est une branche.

— Un embranchement est formé d'un nœud et des branches qui en partent :

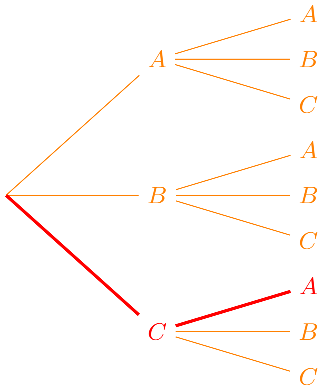


est un embranchement.

— Un *niveau* est formé de tous les embranchements qui sont également éloignés de la racine :



— Un *chemin* est formé d'une succession de nœuds et de branches qui partent de la racine pour aboutir à une feuille de l'arbre. En rouge ci-dessous est indiqué un chemin :



Dans un arbre probabiliste ce sont les chemins et non les nœuds qui représentent les issues. Dans cet arbre il y a 9 chemins qui correspondent à autant d'issues. Les issues sont souvent désignés par la succession (dans l'ordre) des nœuds : CA est le chemin passant d'abord par C puis par A.

2. Notons E_1 : « Les deux personnes s'assoient sur le banc A. »

Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

$E_1 = \{AA\}$
Il y a équiprobabilité, E_1 est réalisé par 1 issue et l'univers comporte 9 issues, donc

$$\boxed{P(E_1) = \frac{1}{9}.}$$

3. Notons E_2 : « Les deux personnes s'assoient sur le même banc. »

Calculons $\mathbb{P}(E_2)$.

$E_2 = \{AA; BB; CC\}$
Il y a équiprobabilité, E_2 est réalisé par 3 issues et l'univers comporte 9 issues, donc

$$\boxed{P(E_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.}$$

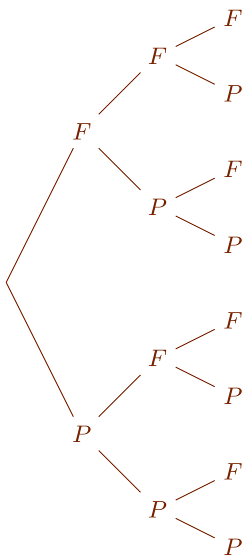
Exercice 7.

On lance 3 fois une pièce bien équilibrée.

1. représentez la situation par un arbre.
2. Quelle est la probabilité :
   (a) d'avoir 3 faces ?
   (b) que le deuxième jet soit face ?
   (c) que le troisième jet soit différent du premier ?

Correction exercice 7

1.



Une issue de cette expérience est ici formée d'un triplet de résultats de pile ou face. Par exemple PFP est l'issue obtenir d'abord pile, puis face et enfin pile.

2. (a) Calculons $\mathbb{P}(FFF)$.

   Il y a équiprobabilité et l'univers comporte 8 issues donc :

   $$\boxed{\mathbb{P}(FFF) = \frac{1}{8}.}$$

   (b) Notons A : « le deuxième jet est face ».

   Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   $A = \{FFF, FFP, PFF, PFP\}$.

Il y a équiprobabilité, A est réalisé par 4 issues et l'univers contient 8 issues donc $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}.}$$

(c) Notons B : « le troisième jet est différent du premier ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$B = \{FFP, FPP, PFF, PPF\}$.
Il y a équiprobabilité, B est réalisé par 4 issues et l'univers contient 8 issues donc $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}.}$$

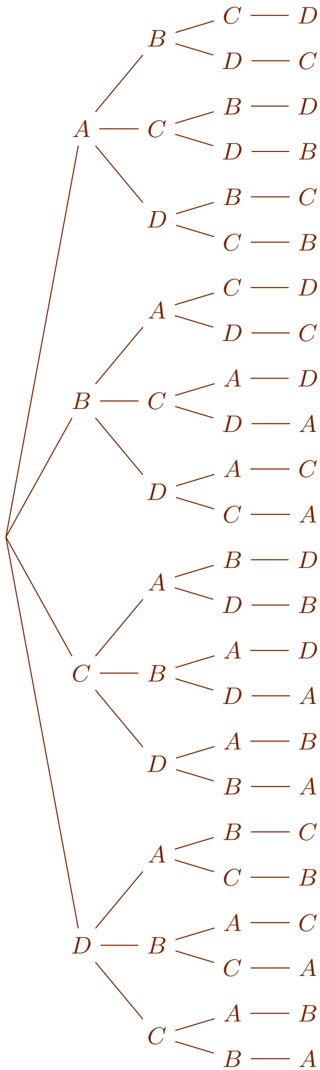
Exercice 8.

Un examinateur doit interroger, dans un un certain ordre, quatre candidats : Arthur, Béatrice, Chloé et David. Il doit établir une liste ordonnée de quatre noms.

1. À l'aide d'un arbre, déterminez le nombre de listes possibles.
2. L'examinateur tire la liste des quatre noms au hasard, chaque liste possible, ayant la même probabilité.
   Déterminez la probabilité de chacun des événements suivants :
   - E :« Béatrice est interrogée en premier ».
   - F :« Chloé est interrogée en dernier ».
   - G :« David est interrogé avant Béatrice ».
3. Définir par une phrase l'événement $E \cap F$ et en donner la probabilité.
4. Définir par une phrase l'événement $E \cup F$ et en donner la probabilité.

Correction exercice 8

1. L'arbre est particulièrement recommandé pour représenter une situation ou des choix successifs sont fait : chaque niveau de l'arbre correspond un choix. Ainsi les niveaux de l'arbre représentent une chronologie.



L'univers contient 24 issues.

Rappelons qu'une issue correspond à un chemin sur l'arbre donc ici une issue peut être représentée par une succession de 4 lettres.

2. Calculons $P(E)$.

$E = \{BACD; BADC; BCAD; BCDA; BDAC; BDCA\}$.

Il y a équiprobabilité, E est réalisé par 6 issues, l'univers contient 24issues, donc

$$P(E) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Calculons $P(F)$.

$F = \{ABDC; ADBC; BADC; BDAC; DABC; DBAC\}$.
Il y a équiprobabilité, F est réalisé par 6 issues, l'univers contient 24 issues, donc

$$P(F) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Calculons $P(G)$.

$G = \{ACDB; ADBC; ADCB; CADB; CDAB; CDBA; DABC;$
$DACB; DBAC; DBCA; DCAB; DCBA\}$.
Il y a équiprobabilité, G est réalisé par 12 issues, l'univers contient 24 issues, donc

$$P(G) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 9.

Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix

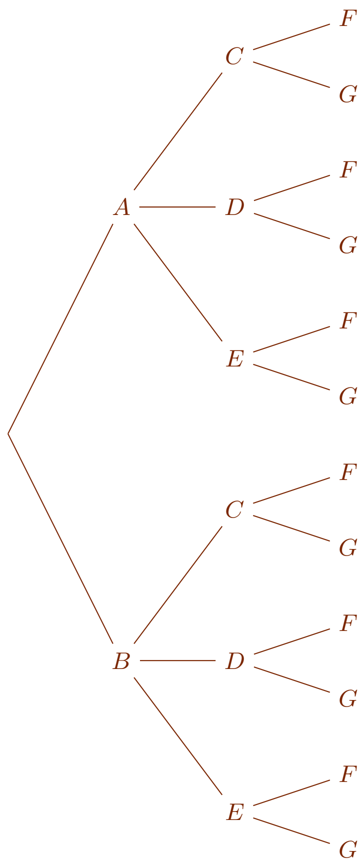
- entre 2 entrées : Artichaut ou Betterave ;
- entre 3 plats : Cheval, Daube ou Escalope ;
- entre 2 desserts : Fromage ou Gâteau.

Un menu se compose :
— d'une entrée ;
— d'un plat ;
— d'un dessert.

1. En utilisant un arbre, représenter tous les menus.
2. Combien de menus différents sont possibles ?
3. On choisit un menu au hasard.
   Quelle est la probabilité :
   (a) qu'il comporte une escalope ?
   (b) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
   (c) qu'il ne comporte pas de cheval ?

Correction exercice 9

1. En utilisant des notations transparentes au vu de l'énoncé :



   L'univers comporte donc 12 issues. Par exemple BDF est une issue.

2. D'après l'arbre

   $\boxed{\text{12 menus sont possibles.}}$

3. (a) Notons M_1 : « le menu comporte une escalope ».

   Calculons $\mathbb{P}(M_1)$.

   $M_1 = \{AEF, AEG, BEF, BEG\}$
   Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et M_1 est réalisé par 4 issues donc : $\mathbb{P}(M_1) = \frac{4}{12}$.

   $$\boxed{\mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{3}.}$$

(b) Notons M_2 : « le menu comporte de l'artichaut et du fromage ».

Calculons $\mathbb{P}(M_2)$.

$M_2 = \{ACF, ADF, AEF\}$
Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et M_2 est réalisé par 3 issues donc : $\mathbb{P}(M_2) = \frac{3}{12}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(M_2) = \frac{1}{4}.}$$

(c) Notons M_3 : « le menu ne comporte pas de cheval ».

Calculons $\mathbb{P}(M_3)$.

$\overline{M_3} = \{ACF, ACG, BCF, BCG\}$
Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et $\overline{M_3}$ est réalisé par 4 issues donc : $\mathbb{P}(\overline{M_3}) = \frac{4}{12}$.
Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_3) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{M_3}) \\ &= 1 - \frac{4}{12} \\ &= \frac{8}{12} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(M_3) = \frac{2}{3}.}$$

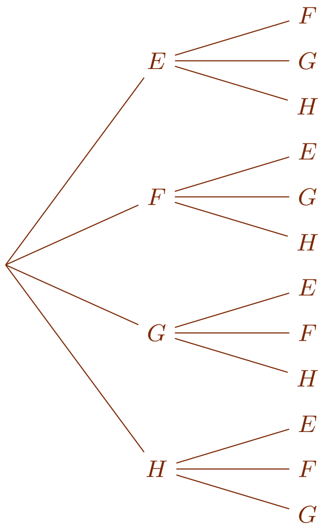
Exercice 10.

Un groupe de 4 amis, Émile, Flore, Gaston et Hélène sont dans un bateau. Ils tirent au sort celui qui va ramer et, parmi les noms restants, celui qui va écoper.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Déterminer les probabilités suivantes.
   (a) C'est un garçon qui rame.
   (b) Hélène écope.
   (c) Les deux qui travaillent sont de même sexe.

Correction exercice 10

1.



2. (a) Notons R_1 : « un garçon rame ».

   Calculons $\mathbb{P}(R_1)$.

   $R_1 = \{EF, EG, EH, GE, GF, GH\}$
   Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et R_1 est réalisé par 6 issues donc : $\mathbb{P}(R_1) = \frac{6}{12}$.

   $$\boxed{\mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{2}.}$$

   (b) Notons R_2 : « Hélène écope ».

   Calculons $\mathbb{P}(R_2)$.

   $R_2 = \{HE, HF, HG\}$
   Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et R_2 est réalisé par 3 issues donc : $\mathbb{P}(R_2) = \frac{3}{12}$.

   $$\boxed{\mathbb{P}(R_2) = \frac{1}{4}.}$$

   (c) Notons R_3 : « les deux qui travaillent sont de même sexe ».

   Calculons $\mathbb{P}(R_3)$.

   $R_3 = \{EG, H, GE, HF\}$
   Or il y a équiprobabilité, l'univers comporte 12 issues et R_3 est réalisé par 4 issues donc : $\mathbb{P}(R_4) = \frac{4}{12}$.

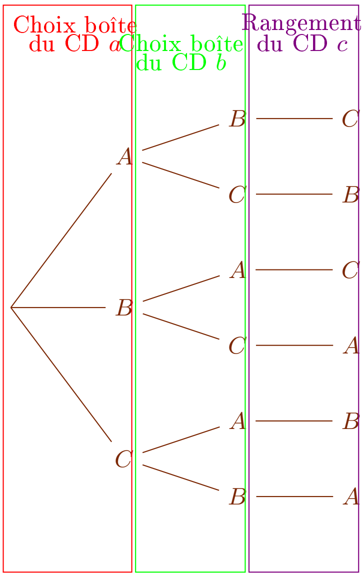
$$\mathbb{P}(R_3) = \frac{1}{3}.$$

Exercice 11.

Trois CD notés a, b et c ont respectivement des boîtes nommées A, B et C.
On range les 3 CD au hasard dans les boîtes sans voir leur étiquette.

1. Combien de rangements sont possibles ?
2. Quelle est la probabilité
   (a) que les 3 CD soient bien rangés ?
   (b) qu'exactement 1 CD soit bien rangé ?
   (c) qu'exactement 2 CD soient bien rangés ?
3. En déduire la probabilité qu'aucun CD ne soit bien rangé.

Correction exercice 11

1. 

2. (a) Notons E_1 : « les trois CD sont bien rangés ».

   Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

   $E_1 = \{ABC\}$.

La loi de probabilité est l'équiprobabilité, l'univers comporte 6 issues et E_1 est réalisé par une issue donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \tfrac{1}{6}.}$$

(b) Notons E_2 : « exactement un CD est bien rangé ».

Calculons $\mathbb{P}(E_2)$.

$E_2 = \{ACB, BAC, CBA\}$.
La loi de probabilité est l'équiprobabilité, l'univers comporte 6 issues et E_2 est réalisé par 3 issues donc : $\mathbb{P}(E_2) = \frac{3}{6}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(E_2) = \tfrac{1}{2}.}$$

(c) Notons E_3 : « exactement deux CD sont bien rangés ».

Calculons $\mathbb{P}(E_3)$.

$E_3 = \varnothing$.

$$\boxed{\mathbb{P}(E_3) = 0.}$$

3. Notons E_4 : « aucun CD n'est bien rangé ».

Calculons $\mathbb{P}(E_4)$.

$\overline{E_4} = E1 \cup E_2 \cup E_3$
Comme E_1, E_2 et E_3 sont incompatibles (disjoints) deux à deux :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{E_4}) &= \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3)\\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 0\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_4) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{E_4})\\ &= 1 - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_4) = \tfrac{1}{3}.}$$

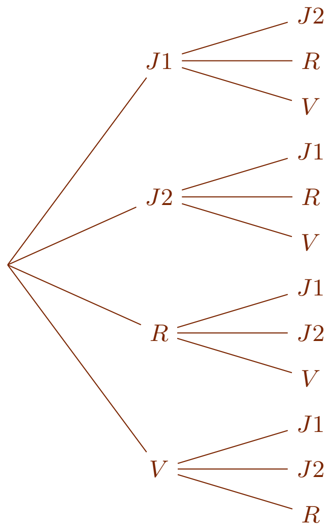
Exercice 12.

Une urne contient 4 jetons : deux jaunes, un rose et un violet.
On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
3. On considère les événements :
   — R : « Le 1$^{\text{er}}$ jeton tiré est rose » ;
   — J : « Le 2$^{\text{e}}$ jeton tiré est jaune ».
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(R)$ et $\mathbb{P}(J)$.
   (b) Traduire par une phrase $R \cap J$.
   Calculer $\mathbb{P}(R \cap J)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(R \cup J)$.
4. On considère l'événement :
   — N :« Aucun jeton tiré n'est jaune ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(N)$.
   (b) Exprimer $\overline{N}$ par une phrase.
   (c) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{N}\right)$.

Correction exercice 12

1. La modélisation la plus simple (car utilisant l'équiprobabilité) nécessite de distinguer les deux jetons jaunes : $J1$ et $J2$.



2. D'après l'arbre précédent : $\#(\Omega) = 12$.

   Il y a 12 tirages possibles.

3. (a) Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R})$.

   $\tilde{R} = \{RJ1, RJ2, RV\}$.
   Il y a équiprobabilité, $\tilde{R}$ est réalisé par 3 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{R}) = \frac{3}{12}$.

   $\mathbb{P}(\tilde{R}) = \frac{1}{4}$.

   Calculons $\mathbb{P}(\tilde{J})$.

   $\tilde{J} = \{J1J2, J2J1, RJ1, RJ2, VJ1, VJ2\}$.
   Il y a équiprobabilité, $\tilde{J}$ est réalisé par 6 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{J}) = \frac{6}{12}$.

   $\mathbb{P}(\tilde{J}) = \frac{1}{2}$.

   (b)

   $\tilde{R} \cap \tilde{J}$: « le premier jeton est rose et le second est jaune ».

Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J})$.

$\tilde{R} \cap \tilde{J} = \{RJ1, RJ2\}$.
Il y a équiprobabilité, $\tilde{R} \cap \tilde{J}$ est réalisé par 2 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) = \frac{2}{12}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) = \frac{1}{6}.}$$

(c) Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J})$.

Ici peu importe la loi de probabilité nous allons utiliser une formule qui fonctionne pour toutes les lois de probabilités.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J}) &= \mathbb{P}(\tilde{R}) + \mathbb{P}(\tilde{J}) - \mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J}) = \frac{7}{12}.}$$

4. (a) Calculons $\mathbb{P}(N)$.

$N = \{VR, RV\}$.
Il y a équiprobabilité, N est réalisé par 2 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(N) = \frac{2}{12}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(N) = \frac{1}{6}.}$$

(b)

$$\boxed{\overline{N} : \text{« au moins un jeton est jaune ».}}$$

(c) Calculons $\mathbb{P}(N)$.

Ici peu importe la loi de probabilité nous allons utiliser une formule qui fonctionne pour toutes les lois de probabilités.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{N}) \\ &= 1 - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(N) = \frac{5}{6}.}$$

Exercice 13.

Dans une classe de seconde, on a représenté dans le tableau suivant les langues vivantes étudiées en première langue par les 35 élèves. (On suppose que chaque élève étudie une seule première langue.)

	Anglais	Allemand	Espagnol
Garçons	8	3	4
Filles	10	4	6

On interroge au hasard un élève de cette classe. On s'intéresse aux événements suivants :

- F : « l'élève interrogé est une fille ».
- E : « l'élève interrogé étudie l'espagnol comme première langue ».

Calculez la probabilité de chacun des événements suivants : $E \cap F$, $E \cup F$, $\overline{E} \cap \overline{F}$ et $E \cup \overline{F}$.

Correction exercice 13

Choisir un élève parmi les 35 est une expérience aléatoire nous modélisons cette expérience par un univers de 35 issues muni de l'équiprobabilité (chaque élève a autant d'être choisi qu'un autre).

Remarquons que, comme tout modélisation, le choix de l'équiprobabilité est arbitraire.

1. Calculons $\mathbb{P}(E \cap F)$.

   Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées $E \cap F$ est réalisé par 6 issues et l'univers comporte 35 issues donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(E \cap F) = \frac{6}{35}.}$$

2. Calculons $\mathbb{P}(E \cup F)$.

   Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées $E \cup F$ est réalisé par $10 + 4 + 6 + 4 = 24$ issues et l'univers comporte 35 issues donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(E \cup F) = \frac{24}{35}.}$$

3. Calculons $\mathbb{P}(\overline{E} \cup \overline{F})$.

   Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées $\overline{E} \cap \overline{F}$ est réalisé par $8 + 3 = 11$ issues et l'univers comporte 35 issues donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(\overline{E} \cup \overline{F}) = \frac{11}{35}.}$$

4. Calculons $\mathbb{P}(E \cup \overline{F})$.

   Il y a équiprobabilité, d'après le tableau de données croisées $E \cup \overline{F}$ est réalisé par $8 + 3 + 4 + 6 = 21$ issues et l'univers comporte 35 issues donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(E \cup \overline{F}) = \frac{21}{35}.}$$

Exercice 14.

Un car scolaire se dirige vers Saint Jacques de Compostelle en passant par Conques avec à son bord 75 élèves dont 40 garçons.
Miguel, le chauffeur, fait un sondage auprès des élèves pour savoir qui aime les chants grégoriens. Il découvre alors que 32 élèves ne les aiment pas, dont la moitié sont des filles, et que 20 % des garçons les aiment, et que 18 filles n'en ont jamais entendu parler.

1. Recopie et complète le tableau ci-dessous.

	Aime	N'aime pas	Ne connaît pas	Total
Garçons				
Filles				
Total				

2. On tire au hasard la fiche d'un élève.
   Quelle est la probabilité que :
   (a) ce soit un garçon ;
   (b) ce soit un garçon qui aime les chants grégoriens ;
   (c) ce soit un garçon ou un élève qui aime les chants grégoriens ;
3. On tire au hasard la fiche d'un garçon.
   Quelle est la probabilité qu'il aime les chants grégoriens ?

Correction exercice 14

Illustre bien le fait que sur un univers fini muni de l'équiprobabilité probabilité et proportions se confondent.

1.

	Aime	N'aime pas	Ne connaît pas	Total
Garçons	8	16	16	40
Filles	1	16	18	35
Total	9	32	34	75

2. Nous choisissons l'équiprobabilité sur un univers de 75 issues pour modéliser l'expérience aléatoire.

(a) Notons G : « la fiche est celle d'un garçon ».

Calculons $\mathbb{P}(G)$.

Il y a équiprobabilité, G est réalisé par 40 issues et l'univers contient 75 issues donc : $\mathbb{P}(G) = \frac{40}{75}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{8}{15}.}$$

(b) Notons H : « la fiche est celle d'un garçon qui aime les chants grégoriens ».

Calculons $\mathbb{P}(H)$.

Il y a équiprobabilité, H est réalisé par 8 issues et l'univers contient 75 issues donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{8}{75}.}$$

(c) Notons L : « la fiche est celle d'un garçon ou un élève qui aime le chant grégorien ».

Calculons $\mathbb{P}(L)$.

Il y a équiprobabilité, L est réalisé par $8 + 16 + 16 + 1 = 41$ issues et l'univers contient 75 issues donc :

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \frac{41}{75}.}$$

3. Puisque la fiche est tirée parmi celle des garçons l'univers est modifié. Choisissons une modélisation adaptée.
Choisissons la loi de probabilité uniforme sur un univers de 40 issues.

Notons M : « la fiche est celle d'un garçon qui aime le chant grégorien ».

Calculons $\mathbb{P}(M)$.

Il y a équiprobabilité, M est réalisé par 8 issues et l'univers contient 40 issues donc : $\mathbb{P}(M) = \frac{8}{40}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(M) = \frac{1}{5}.}$$

Vous verrez l'année prochaine un outils qui permet de faire ce genre de calcul sans avoir besoin de choisir une nouvelle modélisation appelé la probabilité conditionnelle.

Exercice 15.

Calculez la probabilité que deux élèves d'une classe de 35 élèves soient nés le même jour de l'année.

Exercice 16.

On lance un dé bien équilibré à six faces dont trois sont bleues, deux sont blanches et une est rouge.

1. Les trois couleurs sont-elles équiprobables ?
2. Déterminer la probabilité d'apparition de chaque couleur.

Correction exercice 16

Commençons par modéliser cette situation avec l'équiprobabilité.
Notons $\Omega = \{B_1,B_2,B_3,Bl_1,Bl_2,R\}$ et munissons cet univers de l'équiprobabilité.

Notons
— E_1 : « obtenir le bleu »,
— E_2 : « obtenir le blanc »,
— E_3 : « obtenir le rouge ».
Comme dans tous les exercices précédents : $\mathbb{P}(E_1) = \frac{3}{6}$, $\mathbb{P}(E_2) = \frac{2}{6}$ et $\mathbb{P}(E_3) = \frac{1}{6}$.

Les trois couleurs ne sont pas équiprobables.

Considérons une autre modélisation.
On considère $\Omega = \{B,Bl,R\}$ muni de la loi de probabilité :

ω	B	Bl	R
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Nous avons bien une probabilité puisque la somme des probabilités égale 1.
Les probabilités sont alors immédiates et la conclusion est bien

les trois couleurs ne sont pas équiprobables.

Exercice 17.

On lance deux dés à quatre faces et on regarde la somme obtenue.

1. Donner l'ensemble des résultats possibles.
2. Donner une loi de probabilités de cette expérience aléatoire (justifier).
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre multiple de trois ?

Correction exercice 17

Pour cet exercice, à titre d'exemple je choisis une modélisation qui n'utilise pas l'équiprobabilité.

1. Au brouillon avec un tableau double entrée :

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Ce qui nous permet de choisir une modélisation.

Notons $\omega = \{2;3;4;5;6;7;8\}$ et munissons Ω de la loi :

ω	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. Notons A : « obtenir un nombre pair ».

Calculons $\mathbb{P}(A)$.

$A = \{2;4;6;8\}$.
Par définition :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) + \mathbb{P}(\{8\})$$

D'après la loi de probabilité (tableau ci-dessus) :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \tfrac{1}{2}.}$$

3. Notons B : « obtenir un multiple de trois ».

Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$B = \{3;6\}$.
Par définition :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{6\})$$

D'après la loi de probabilité (tableau ci-dessus) :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2}{16} + \frac{3}{16}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \tfrac{5}{16}.}$$

Exercice 18.

IV Ce qu'il faut retenir.

1. Connaître le vocabulaire et les notations de probabilité : expérience aléatoire, issue, univers, loi de probabilité, distribution de probabilité, équiprobabilité, événement, événement certain, événement impossible, événement contraire.
2. Savoir représenter une expérience aléatoire par un tableau double entrée, par un arbre ou par tableau de données croisées.
3. Modéliser par une expérience aléatoire équiprobable.
4. Calculer des probabilités d'événements dans un cas d'équiprobabilité.
5. Exprimer un événement en énumérant les issues qui le réalise ou par une phrase.
6. Exprimer par une phrase des réunions et intersection d'événements.
7. Calculer des probabilités de réunions ou intersections d'événements.