Droites du plan.

I La définition moderne d'une droite.

Définition.

Formaliser ça sous forme d'exemple pour l'année suivante ?

1. Première étape. Partir d'un point A et faire des translations de multiples d'un vecteur $\vec{u}$. Observer l'objet géométrique aonso observé.
2. Seconde étape. Comment reconstruire une droite (AB) en utilisant l'idée précédente ?

Le vecteur qui nous a permis de reconstruire la droite à partir d'un point est appelé un vecteur directeur. Pourquoi « un » ? Parce qu'il pourrait tout aussi bien être remplacé par n'importe quel autre vecteur qui lui soit colinéaire. Peut-il être remplacé par un vecteur nul ?

Définition 1

Soient A et B deux points distincts du plan euclidien.

Nous noterons (AB), et nous appellerons *droite passant par A et B*, l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Remarques.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ou n'importe quel vecteur qui lui soit colinéaire et non nul est appelé *un vecteur directeur de la droite*.
2. Pour définir une droite il faut et il suffit que nous en connaissions un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$. Nous avions besoin de deux points et nous avons à nouveau besoin de deux informations.
3. Cette définition de la droite ne dépend pas d'un repère choisi et est donc très générale.

Tracer une droite connaissant un point et un vecteur directeur.

Exercice 1.

Après avoir choisi un repère du plan dessinez la droite passant par $A(2,1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

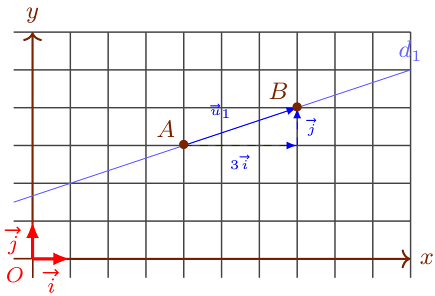
Exercice 2. Application.

Exercice 60 page 202 du manuel Déclic : tracer une droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur.

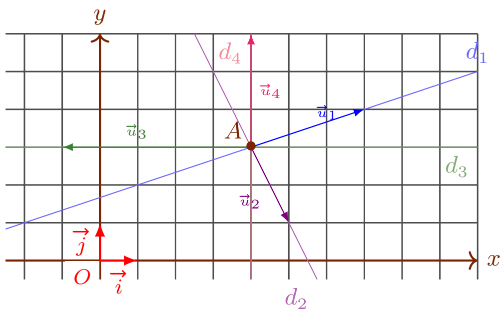
On considère un point $A(4;3)$.
Tracez quatre droites d_1 à d_4 passant par A et admettant respectivement pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.

Correction exercice 2

L'idée principale est la suivante pour tracer une droite nous devons en connaître deux points. Nous connaissons déjà A il faut en trouver un autre. Le plus simple est de prendre le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. Une autre façon de dire les choses nous cherchons l'image, B, de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.



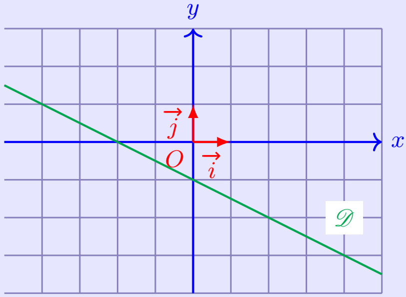
En procédant de même pour les autres vecteurs :



Décrire une droite par un point et un vecteur directeur.

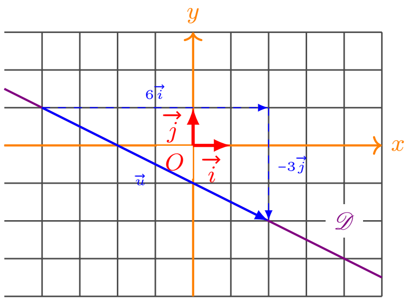
Exercice 3.

Sans justification donnez les coordonnées de 3 vecteurs directeurs de la droite $\mathscr{D}$ représentée ci-dessous dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



Correction exercice 3

Il suffit de trouver les coordonnées d'un vecteur « porté » par la droite. Pour avoir davantage de vecteurs directeurs on peut lire d'autres coordonnées ou prendre les coordonnées du précédent vecteur multiplié par n'importe quel nombre.



Les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.

Exercice 61 page 202 declic 2de 2019 : vérifier qu'un vecteur est vecteur directeur, calculer les coordonnées d'un vecteur directeur connaissant celles de deux points de la droite.

Dans chacun des cas suivants, indiquez si le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

1. $A(-14;2)$, $B(5;-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
2. $A(-7;3)$, $B(5;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$.
3. $A(5;2)$, $B(0;-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$.
4. $A(4;-2)$, $B(3;-4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}4{,}5\\9\end{pmatrix}$.

<u>Correction exercice 4</u>

1. Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix}5-(-7) & -6\\ 1-3 & 1\end{vmatrix}\\ &= 12\times 1-(-6)\times(-2)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc :

$$\boxed{\vec{u} \text{ est un vecteur directeur de } (AB).}$$

2. Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix}0-5 & 2\\ -3-2 & -2\end{vmatrix}\\ &= (-5)\times(-2)-(-5)\times 2\\ &= 20\\ &\neq 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires donc :

$$\boxed{\vec{u} \text{ n'est pas un vecteur directeur de } (AB).}$$

3. Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u}\right) &= \begin{vmatrix} 3-4 & 4{,}5 \\ -4-(-2) & 9 \end{vmatrix}\\ &= (-1)\times 9-(-2)\times 4{,}5\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires donc :

$\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (AB).

Exercice 5. Application.

Exercice 62 page 202 : vérifier qu'un vecteur est vecteur directeur, calculer les coordonnées d'un vecteur directeur connaissant celles de deux points de la droite.

Dans chacun des cas suivants, calculez les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB).

1. $A(2;3)$ et $B(-1;2)$.
2. $A(-5;4)$ et $B(3;1)$.
3. $A(3;0)$ et $B(0;3)$.
4. $A(7;8)$ et $B(7;9)$.

Correction exercice 5

1. Puisque A et B sont distincts $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB). $2\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{AB}$ sont donc deux autres vecteurs directeurs de (AB).
$\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB).
2. $\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}16\\-6\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}24\\-9\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB).
3. $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB).

Parallélisme et vecteurs directeurs.

Maintenant que nous avons une définition de la droite nous allons reformuler les propriétés des droites avec cette définition.

Définition 2

Nous dirons que deux droites sont *parallèles* si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires
Dans ce cas ont ont dit qu'elles ont la même direction.

Exercice 6. Application.

Exercice 63 page 202. déclic 2de 2019

On considère une droite d passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.
Soient $B(7;-5)$, $C(-4;6)$ et $D(3;-4)$.

1. Tracez la droite d puis placez B, C et D.
2. Le point B est-il sur d ?
3. Les droites d et (CD) sont-elles parallèles ?

Correction exercice 6

1.
2. Déterminons si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u}\right) &= \begin{vmatrix}7-3 & -2\\ -5-1 & 3\end{vmatrix}\\ &= 4\times 3-(-6)\times(-2)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires donc B appartient à la droite passant ar A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

B appartient à d.

3. Déterminons si $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{u}\right) &= \begin{vmatrix} 3-(-4) & -2 \\ -4-6 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 7\times 3-(-10)\times(-2) \\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires donc :

d et (CD) ne sont pas parallèles.

Perpendicularité et vecteurs directeurs.

La perpendicularité de deux droites nécessite d'introduire une nouvelle opération entre les vecteurs que vous verrez l'année prochaine appelé le *produit scalaire*. Donc patience ...

II Les équations cartésiennes de droites.

Équation cartésienne.

Exemple.

Comment exprimer le fait qu'une point M appartienne à une droite en utilisant ses coordonnées ?
La géométrie même vectorielle est sympathique mais il est difficile de la faire manipuler par un ordinateur. Que dit ordinateur dit numérique, et qui dit numérique dit coordonnées cartésiennes.
Puis faire apparaître un exemple de relation liant abscisse et ordonnée d'un point d'une droite dans un repère cartésien.

Proposition 1

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan euclidien.

(i) Pour toute droite $\mathscr{D}$ il existe des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls) tels que $\mathscr{D}$ est formée de tous les points $M(x{,}y)$ pour lesquels x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$.

(ii) Réciproquement étant donné des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls), l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite.

Démonstration 1

(i) Soient $A(x_A{,}y_A)$ et $B(x_B{,}y_B)$ deux points distincts de $\mathscr{D}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{D} &\iff \det\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}\right) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0 \\
&\iff (y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y - x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A) = 0
\end{aligned}$$

Donc en posant $a = y_B - y_A$, $b = -(x_B - x_A)$ et $c = -x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A)$ nous obtenons bien que x et y sont solution de l'équation $ax + by + c = 0$.

(ii) Cette démonstration est plus technique et astucieuse. Nous n'en présenterons ici que la trame.

Pour s'assurer que l'équation est celle d'une droite nous devons trouver une droite qui lui corresponde, *i.e.* un point et un vecteur directeur de cette droite.

Pour le point nous choisirons $\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$ si $a \neq 0$ et $\left(0; -\frac{c}{b}\right)$ sinon.

Pour le vecteur directeur nous choisissons $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (ce choix astucieux s'inspire de la démonstration de (i)).

Il ne reste plus, en faisant comme au (i), qu'à vérifier que l'équation cartésienne obtenue pour ce point et ce vecteur directeur est bien : $ax + by + c = 0$.

Remarques.

1. Une équation cartésienne n'est pas unique : $x + 3y + 1 = 0$ et $2x + 6y + 2 = 0$ sont deux équations cartésiennes d'une même droite, la seconde étant obtenue en multipliant la première par 2.
2. Dans la suite de la leçon nous distinguerons trois types de droites correspondant à deux types d'équations différentes.

3. Le choix du vecteur directeur au (ii) de la démonstration est à retenir : si une droite à une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ alors les vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

Exercice 7.

Soient $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère cartésien, $A(3; -1)$ un point et $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ -102 \end{pmatrix}$.

1. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant pas A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Démontrer que $B\left(0; -\frac{155}{2}\right) \in \mathscr{D}$.

Correction exercice 7

1. La méthode de la détermination d'une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur directeur est à connaître.

   Notons $\mathscr{D}$ la droite passant pas A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

   Déterminons une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

   Soit $M(x; y) \in \mathscr{D}$.

   $M \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, ce qui équivaut encore successivement à

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AM}; \vec{u}\right) &= 0 \\
\begin{vmatrix} x_{AM} & x_u \\ y_{AM} & y_u \end{vmatrix} &= 0 \\
\begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ y-(-1) & -102 \end{vmatrix} &= 0 \\
(x-3) \times (-102) - (y+1) \times (-4) &= 0 \\
-102x + 4y + 310 &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{D} :\ -102x + 4y + 310 = 0.}$$

2. La méthode pour vérifier qu'un point appartient à une droite dont on connaît une équation est à savoir.

   Vérifions que $B \in \mathscr{D}$.

   $B \in \mathscr{D}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation cartésienne de $\mathscr{D}$. Or

$$\begin{aligned}-102x_B+4y_B+310&=-102\times 0+4\times\left(-\frac{155}{2}\right)+310\\&=0\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{B\in\mathscr{D}.}$$

Exercice 8. Application.

Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant A et de vecteurs directeur $\vec{u}$.

1. $A(3;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.
2. $A(-2;5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$.
3. $A(5;-10)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
4. $A(0;4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

Correction exercice 8

1. $\mathscr{D}:\ 2x+y-10=0$.
2. $\mathscr{D}:\ -3x-y-1=0$.
3. $\mathscr{D}:\ x+3y+25=0$.
4. $\mathscr{D}:\ x-5y+20=0$.

Exercice 9. Application.

Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et B.

1. $A(2;1)$ et $B(5;-6)$.
2. $A(-3;0)$ et $B(1;1)$.
3. $A(-1;7)$ et $B(0;3)$.
4. $A(6;8)$ et $B(3;2)$.

Correction exercice 9

1. $-7x-3x+17=0$.
2. $x-4y+3=0$.
3. $-4x-y+3=0$.
4. $6x-3y-12=0$

Exercice 10. Application.

Soient $A(-3;4)$ et $B(2;1)$ et $C(-1;-3)$.

1. Calculez les coordonnées du point M milieu de $[AC]$.
2. Déduisez-en une équation cartésienne de la médiane issue de B dans ABC.

Correction exercice 10

1. $M\left(-2;\frac{1}{2}\right)$.
2. $\frac{1}{2}x-4y+3=0$.

Exercice 11. Application.

Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ parallèle à (AB) et passant par C.

1. $A(5;4)$, $B(-1;2)$ et $C(4;-3)$.
2. $A(-5;-1)$, $B(6;4)$ et $C(1;2)$.

Correction exercice 11

(AB) et $\mathscr{D}$ sont parallèles si et seulement si tout vecteur directeur de l'une est vecteur directeur de l'autre droite.

1. $-2x+6y+26=0$.
2. $5x-11y+17=0$.

Exercice 12. Application.

Déterminez une équation cartésienne de la droite (AB) puis vérifiez si A, B et C sont alignés.

1. $A(-2;4)$, $B(7;2)$ et $C(11;1)$.
2. $A(-4;-1)$, $B(4;3)$ et $C(44;23)$.
3. $A(-26;20)$, $B(51;6)$ et $C(30;10)$.
4. $A(20;18)$, $B(72;40)$ et $C(124;62)$.

Correction exercice 12

1. $2x-9y+40=0$ Non.
2. $-4x+8y-8=0$. Oui.
3.

Trouver un vecteur directeur grâce à une équation cartésienne.

Nous allons utiliser la remarque faites précédemment : si une droite a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

Exercice 13.

Déterminez un vecteur directeur de la droite d.

1. $d:\ 4x - 3y + 1 = 0$.
2. $d:\ x - 5y + 2 = 0$.
3. $d:\ -x + 2y - 5 = 0$.

Correction exercice 13

1. $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

   Or ici $a = 4$, $b = -3$ et $c = 1$ donc $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
2. Voici une autre façon de déterminer un vecteur directeur d'une droite mais un peu plus lourde. Trouvons deux points distincts A et B de d et alors $\overrightarrow{AB}$ sera un vecteur directeur de d. Pour trouver un point choisissons une valeur de x au hasard et cherchons une valeur de y correspondante e sorte que ce soit un point de la droite. Cherchons (si possible) $A \in d$ de sorte que $x_A = 0$ alors on devrait avoir $x_A - 5y_A + 2 = 0$ et donc $y_A = \frac{2}{5}$. $A\left(0; \frac{2}{5}\right)$ est un point de la droite.

   De même si $x_B = 1$ alors $y_B = \frac{3}{5}$ et $B \in d$.

   Donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d.
3. $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

   Or ici $a = -1$, $b = 2$ et $c = -5$ donc $\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Exercice 14.

Dites si les droites d et d' sont strictement parallèles, confondues ou sécantes.

1. $d:\ 2x - 6y + 5 = 0$ et $d':\ x - 3y + 2 = 0$.
2. $d:\ 4x - 3y + 1 = 0$ et $d':\ 5x - 4y + 2 = 0$.
3. $d:\ 3x + 9y + 2 = 0$ et $d':\ 12x + 36y + 8 = 0$.
4. $d:\ 3x + 9y + 2 = 0$ et $d':\ 12x + 36y + 8 = 0$.

Correction exercice 14

1. Déterminons la position relative de a et d'.

   La position relative de deux droites (position de l'une par rapport à l'autre) dans la plan (coplanaires) n'admet que deux possibilités qui s'excluent mutuellement :
   — les droites sont *sécantes*,
   — les droites sont *parallèles* (et en particulier éventuellement confondues).

   À ce stade de la leçon pour démontrer le parallélisme nous allons utiliser les vecteurs directeurs.

   $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ donc : $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d'.

   Déterminons si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det\left(\vec{u};\vec{u}\right) &= \begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}6 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ &= 6\times1-2\times3\\ &= 0\end{aligned}$$

   Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc d et d' sont parallèles.
   Deux droites parallèles sont confondues si et seulement si elles ont au moins un point en commun. Or $P\left(0;\frac{5}{6}\right)\in d$ mais $P\notin d'$ donc

   d et d' sont strictement parallèles.

2. $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$. $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = -1$. $d \nparallel d'$.
3. $\vec{u} = \begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix}-36\\12\end{pmatrix}$. $\det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = 0$. $d \parallel d'$. $P\left(-\frac{2}{3};0\right)\in d$ et $P\in d'$ donc $d = d'$ (droites confondues).

Équations réduites.

Les équations réduites sont des équations cartésiennes simplifiées qui font le lien entre équation cartésienne et fonction affine.

Pour une fonction affine chaque valeur indiquée sur l'axe des abscisses est reliée à une valeur sur l'axe des ordonnées. Les ordonnées, y, s'expriment en fonction des valeurs en abscisses, x.

Autrement dit pour définir un fonction nous devons obtenir une expression de la forme : $y = f(x)$. Nous allons l'obtenir à partir d'une équation cartésienne.

Exemples.

1. Soit $\mathscr{D}$ la droite dont une équation cartésienne dans un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est $4x + 2y - 14 = 0$.

   Nous voulons obtenir y en fonction de x donc nous allons faire comme si nous connaissions la valeur de x et résoudre l'équation d'inconnue x.

   $$4x + 2y - 14 = 0$$

   équivaut successivement à

   $$\begin{aligned} 4x + 2y - 14 - 4x + 14 &= 0 - 4x + 14 \\ 2y &= -4X + 14 \\ \frac{2y}{2} &= \frac{-4x + 14}{2} \\ y &= \frac{-4x}{2} + \frac{14}{2} \\ y &= -2x + 7 \end{aligned}$$

   Nous voyons bien apparaître une fonction affine.

2. Soit d la droite dont une équation cartésienne dans un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est $8y + 32 = 0$.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation cartésienne dans un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est $3x + 6 = 0$.

   Dans ce cas nous ne pourrons

Proposition 2 - équations réduites.

Soient :

. $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan,

. $\mathscr{D}$ une droite du plan.

(i) Si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $x = r$ avec r une constante réelle.

(ii) Si $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $y = mx + p$ avec m et p des constantes réelles.

Démonstration 2

Considérons une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Nous utiliserons le fait que la vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et aussi le fait que a et b ne peuvent être simultanément nuls.

On distingue les deux cas.

(i) Premier cas : la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Donc le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{j}$ et par conséquent : $-b = 0$ et $a \neq 0$.

Ainsi l'équation cartésienne de $\mathscr{D}$ se simplifie en $ax + c = 0$. Et puisque $a \neq 0$: $x = \frac{-c}{a}$.

(ii) Second cas : la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

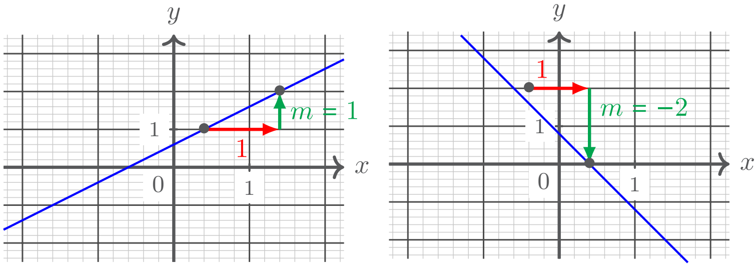
Donc le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{j}$ et nécessairement : $b \neq 0$.

Ainsi l'équation cartésienne de $\mathscr{D}$ peut s'écrire : $y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}$.

Remarques.

1. Comme $y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0$ nous pouvons affirmer que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$.

   Nous obtenons ainsi une méthode de lecture graphique du coefficient directeur d'une droite.



2. Nous reconnaissons, dans la seconde équation réduite, l'expression d'une fonction affine. m sera encore appelé la pente (ou le coefficient directeur) et p l'ordonnée à l'origine.

Proposition 3

Soient :
. $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère d'un plan euclidien,
. A et B deux points distincts du même plan.

Si (AB) admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ alors

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Démonstration 3

En notant $f : x \mapsto mx + p$ nous remarquons que m est le taux d'accroissement de f entre x_A et x_B (puisque $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$).

Exercice 15.

Exercices 67 à 94 page 195 du manuel Indice de seconde.