Colinéarité.

Nous avions vu que nous pouvions additionner des vecteurs et les multiplier par des nombres.

Nous allons nous intéresser à la relation qui existe entre un vecteur et le vecteur obtenu en multipliant ce dernier par un nombre quelconque. Cette relation est appelée la colinéarité.

Lorsque les vecteurs sont des vecteurs du plan nous obtenons une équivalence entre colinéarité et parallélisme. Autrement dit les problèmes de parallélisme vont maintenant pouvoir être traité grâce aux vecteurs. Peu à peu nous voyons que les vecteurs peuvent remplacer les outils de géométrie que nous avions l'habitude d'utiliser en géométrie euclidienne classique (théorème de Thalès, angles alternes-internes, etc).

I Définition.

Définition 1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* si et seulement si il existe un nombre réel λ (*i.e.* on peut en trouver au moins un) tel que

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda\vec{u}$$

Remarques.

1. Nous pouvons voir la chose comme une sorte de rapport de proportionnalité entre les vecteurs.
2. Il suffit d'établir l'une des deux égalités pour établir la colinéarité de deux vecteurs.
3. Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Exercice 1. Application.

Démontrez que si deux vecteurs sont égaux alors ils sont colinéaires.

II Caractérisation.

Proposition 1

Soient :

. $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan,

. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs dont les coordonnées relativement à la base $(\vec{i},\vec{j})$, sont respectivement $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils vérifient l'une au moins des propriétés suivantes.

(i) Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles.

(ii) Il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

(iii) $x_u y_v - x_v y_u = 0$.

Démonstration 1

Par définition de la colinéarité $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Autrement dit si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ y_2 = \lambda y_1 \end{cases}$$

Autrement dit si et seulement si les coordonnées de $\vec{u}$ sont proportionnelles à celles de $\vec{v}$.

Ce qui équivaut à dire que le produit en croix est vérifié.

Autrement dit $x_u \times y_v - x_v \times y_u = 0$.

x_u	x_v
y_u	y_v

Remarques.

1. Le nombre $x_u y_v - x_v y_u$ est appelé le *déterminant de la famille de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$ par rapport à la base $(\vec{i},\vec{j})$* et est noté

$$\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté nous écrirons simplement $\det(\vec{u};\vec{v})$. Cette notation du déterminant ne nécessite pas de connaître les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Au contraire la notation $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ fait intervenir les coordonnées des vecteurs.

D'n point de vu pratique nous retiendrons que deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

2. Nous privilégierons, si possible, la recherche du coefficient de proportionnalité entre les coefficients qui nous fournira l'égalité liant les deux vecteurs plutôt que le calcul du déterminant.

Exercice 2. ♥

Montrez que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\8\end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}+1\end{pmatrix}$.

Correction exercice 2

1. Clairement en considérant les coordonnées des vecteurs nous remarquons une proportionnalité : $\vec{v} = -2\vec{u}$. Et donc

   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Montrons que $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u};\vec{v}) &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix}\\
&= \left(\sqrt{2}-1\right)\times\left(\sqrt{2}+1\right) - 1\times 1\\
&= \sqrt{2}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times 1+(-1)\times\sqrt{2}+(-1)\times 1-1\\
&= \sqrt{2}^2+\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\\
&= 2-2\\
&= 0
\end{aligned}$$

   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 3. Application.

Soient $A(-10;7)$, $B(-20;10)$, $C(5;-2)$ et $D(10;-8)$ des points du plan.
$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont-ils colinéaires ?

Correction exercice 3

Démontrons que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-10) \\ -2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$.

De même les coordonnées de $\overrightarrow{DB}$ sont $\begin{pmatrix} -30 \\ 18 \end{pmatrix}$.

Clairement $\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont colinéaires.

Exercice 4. Application.

Déterminez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si c'est le cas précisez l'égalité les reliant.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$.
4. $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$.
5. $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
6. $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 11 \\ -15 \end{pmatrix}$.
7. $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}$.

III Parallélisme.

Proposition 2

Soient A, B, C et D des points du plan avec $A \neq B$ et $C \neq D$.

$(AB)//(CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Démonstration 2

La démonstration de cette proposition n'est pas possible sans une définition de ce qu'est une droite or nous n'en n'avons pour l'instant pas donné.

Remarques.

1. La négation de cette proposition est aussi intéressante : (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
2. Nous utiliserons ce résultat pour étudier la position relative de droites du plan (coplanaires), *i.e.* pour dire si elles sont parallèles (éventuellement confondues voir corollaire ci-après) ou sécantes.

Exercice 5. ♥

Soient $A(-4;-3)$, $B(8;1)$, $C(4{,}4)$ et $D(-2;2)$ des points du plan.
Étudiez la position relative de (AB) et (CD).

IV Alignement de trois points.

Corollaire 1

Soient A, B et C des points du plan.

A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 6. ♥

Soient $A(-2;3)$, $B(2;1)$ et $C(4;0)$ dans un repère du plan muni d'un repère $(O:\vec{i},\vec{j})$.
Démontrez que A, B et C sont alignés.

Corollaire 2

Soient A, B et M des points du plan.

M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

V Exercices.

Exercice 7.

Déterminez tous les nombres x tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\10\end{pmatrix}$.
1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1+x\\2x\end{pmatrix}$.

Correction exercice 7

1. Le résultat est immédiat en remarquant que $y_v = 2xy_u$ donc nécessairement $x_v = 2x_u = 2\times 1 = 2$.

   Déterminons x.

   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 5 & 10 \end{vmatrix} &= 0 \\ 1 \times 10 - 5 \times x &= 0 \\ 10 - 5x &= 0 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons une équation linéaire du premier degré que nous allons résoudre en travaillant par équivalences successives.

$$\begin{aligned} 10 - 5x - 10 &= 0 - 10 \\ -5x &= -10 \\ \frac{-5x}{-5} &= \frac{-10}{-5} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $x = 2$.

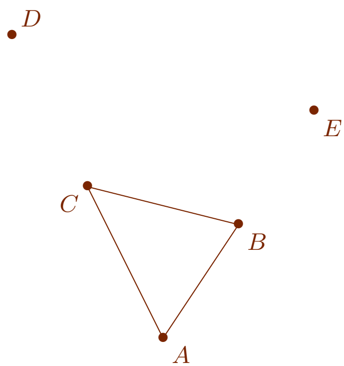
2. De même

$$\begin{aligned} 2 \times (2x) - 3 \times (1 + x) &= 0 \\ 4x - 3 - 3x &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Exercice 8. Application.

Soient ABC un triangle, D et E des points tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.
Faites une figure puis démontrez que C est le milieu du segment $[AD]$.

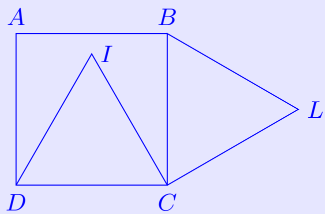
Correction exercice 8



Nous pouvons démontrer le résultat directement avec les vecteurs ou en passant par les coordonnées. Par exemple nous pourrions considérer le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Exercice 9. Application.

Soient $ABCD$ un carré, BCL et DIC des triangles équilatéraux tels que sur la figure ci-contre.
Nous souhaitons établir l'alignement des points A, I et L.
Pour cela considérons le repère orthonormé $(D; C; A)$.



1. Donnez sans justification les coordonnées de D, C, A et B.
2. Déterminez les coordonnées de I et L.
3. Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$.
4. Démontrez l'alignement des points A, I et L.

Exercice 10. Application.

Exercice 120 page 142 du manuel Indice.

Exercice 11. Application.

Exercice 122 page 142 du manuel Indice.

Correction exercice 11

1. * Déterminons les coordonnées de I.

 Puisque I est le milieu de $[BC]$:

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ &= \frac{1+6}{2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

 De même : $y_I = -\frac{1}{2}$.

$$\boxed{I\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right).}$$

 * Déterminons les coordonnées de E.

 $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6-3 \\ -2-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

 D'où : $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 3 \\ \frac{1}{3} \times (-6) \end{pmatrix}$ *i.e.* $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

 De même : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - 3 \\ y_E - 4 \end{pmatrix}$.

 De $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ nous déduisons donc

$$\begin{cases} x_E - 3 = 1 \\ y_E - 4 = -2 \end{cases}$$

 Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{cases} x_E - 3 + 3 = 1 + 3 \\ y_E - 4 + 4 = -2 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_E = 4 \\ y_E = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{E(4; 2).}$$

 * De même qu'au point précédent

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_F - 6 = \frac{1}{3}(3-6) \\ y_F - (-2) = \frac{1}{3}(4-(-2)) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 5 \\ y_F = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$F(5;0).$$

2. (a) Démontrons que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires.

   $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{IF}\right) &= \begin{vmatrix}3 & \frac{3}{2}\\1 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}\\ &= 3\times\frac{1}{2}-1\times\frac{3}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BE} \text{ et } \overrightarrow{IF} \text{ sont colinéaires.}$$

   (b) Nous déduisons de la question précédente que :

$$(BE) \parallel (IF).$$

3. Démontrons que $ABCD$ est un parallélogramme.

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

   Par conséquent :

$$ABCD \text{ est un parallélogramme.}$$

4. (a) Calculons $||\overrightarrow{AC}||$.

   La formule pour la distance euclidienne est la même que celle pour la norme du vecteur. Par contre comme le repère n'est pas orthonormé la norme ne correspond pas forcément à une longueur.

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{AC}|| &= \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}\\ &= \sqrt{(6-3)^2+(-2-4)^2}\\ &= \sqrt{45}\\ &= \sqrt{3^2\times 5}\\ &= \sqrt{3^2}\times\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = 3\sqrt{5}.$$

(b) Nous ne pouvons pas répondre à cette question car le repère n'étant a priori pas orthonormé nous ne pouvons pas établir la présence d'angle droit ou d'égalité de longueur (diagonales).

Si nous supposons que le repère est orthonormé alors, comme $\|\overrightarrow{BD}\| = 9$, nous pouvons affirmer que les diagonales du parallélogramme $ABCD$ ne sont pas de même longueur donc ce n'est pas un rectangle.

5. Démontrons que les points I, F et D sont alignés.

Ils sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-3\\ -1\end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{IF};\overrightarrow{DF}\right) &= \begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -3\\ \frac{1}{2} & -1\end{vmatrix}\\ &= \frac{3}{2}\times(-1)-\frac{1}{2}\times(-3)\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.
Et par conséquent

I, F et D sont alignés.

VI Ce qu'il faut retenir.

1. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.
2. Colinéarité : déterminant.
3. Utilisation de la colinéarité pour le parallélisme et l'alignement.