Vecteurs du plan (introduction).

I Approche intuitive et historique.

Force : apparition historique.

Translation : la définition du collège.

Historique.

II Bipoints : des représentants géométriques d'un vecteur.

Définitions.

Nous définirons un *vecteur* $\vec{u}$ comme le déplacement associé à une translation.

Si M et N sont deux points du plan. Nous dirons que $\overrightarrow{MN}$ est *un représentant du vecteur* $\vec{u}$ correspondant à la translation qui transforme M en N.

Si $\overrightarrow{MN}$ est un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ alors nous définissons
— la *norme du vecteur* par : $||\vec{u}|| = MN$,
— la *direction du vecteur* qui est la droite (MN),
— le *sens du vecteur* $\vec{u}$: de M vers N.

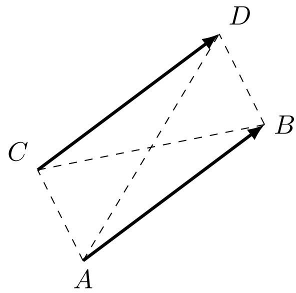
Égalité de représentants.

Deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ représentent le même vecteur si et seulement si ils vérifient les trois conditions :
— $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même norme, *i.e.* $AB = CD$,
— $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, *i.e.* $(AB)//(CD)$,
— le sens de A vers B est le même que celui de C vers D.
Si ces conditions sont vérifiées nous écrirons : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Cette façon, certes intuitive de voir que deux représentants sont égaux, sera avantageusement remplacée dans les démonstrations par la

Proposition 1

Soient A, B, C et D des points du plan.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ représentent un même vecteur (*i.e.* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.



Remarques.

1. Rappelons que pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme il faut et il suffit de montrer que ses diagonales se coupent en leur milieu.
2. Dans la pratique il y a rarement d'inconvénients à confondre un vecteur et un de ses représentants. Nous dirons donc « le vecteur A, B » pour $\overrightarrow{AB}$.
3. A est appelé l'*origine* de $\overrightarrow{AB}$.
4. B est appelé l'*extrémité* de $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 1. ♥

Choisissez A, B, C et D des points distincts et non alignés du plan en dehors du quadrillage de votre feuille.
Notons $\vec{u}$ un vecteur dont $\overrightarrow{AB}$ est un représentant.

1. Dessinez le représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$.
2. Dessinez le représentant de $\vec{u}$ d'origine C.
3. Dessinez le représentant de $\vec{u}$ d'extrémité D.

Exercice 2. ♥

Recommencez le précédent exercice en choisissant maintenant les points sur le quadrillage et en utilisant ce dernier pour construire les représentants.

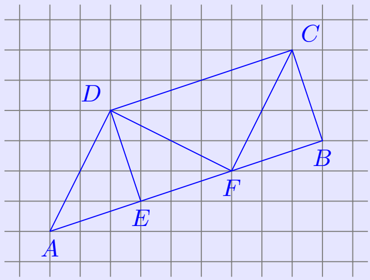
Exercice 3. ♥

Soient $A(-1{,}1)$, $B(2{,}3)$, $C(11,-7)$ et $D(14,-5)$ des points dans un repère orthonormé du plan.
Démontrez que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Exercice 4. Application.

Par lecture graphique indiquez

1. un vecteur égale à $\overrightarrow{AE}$; à $\overrightarrow{CF}$.
2. un vecteur de même direction que $\overrightarrow{CB}$ mais de sens opposé ; idem pour $\overrightarrow{AF}$.
3. un vecteur égale à $\overrightarrow{DC}$ d'extrémité F ; égale à $\overrightarrow{FB}$ d'origine A.
4. deux vecteurs de même de direction, de même sens qui ne sont pas égaux.
5. de vecteurs de même norme qui ne sont pas égaux.



Exercice 5. Application.

Dans un repère $(O; I,J)$ on considère les points $A(-3; -1)$, $B(0; 1)$, $C(-2; 2)$, $D(1; -2)$. Nous noterons $\vec{u}$ le vecteur dont $\overrightarrow{AB}$ est un représentant.

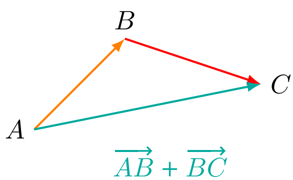
1. Dessinez le représentant $\overrightarrow{CE}$ (donc d'origine C) du vecteur $\vec{u}$.
2. Placez le point F image de D par la translation de vecteur $\vec{u}$.
3. Que peut on conjecturer concernant le quadrilatère $CEFD$?
4. Démontrez votre conjecture.

Somme de représentants de vecteurs : la relation de Chasles.

Proposition 2 - Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points du plan.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Remarques.

1. Pour dessiner le représentant de la somme il faut choisir deux représentants des vecteurs qui « se suivent » : l'extrémité d'un représentant est l'origine de l'autre représentant à sommer.

2. Nous utiliserons aussi cette relation pour « calculer » avec des vecteurs, *i.e.* essentiellement pour simplifier les expressions.
3. La somme de vecteurs est commutative : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

Exercice 6. ♥
Choisissez 4 points A, B, C et D non alignés et hors du quadrillage.
Construisez un représentant du vecteur somme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

Exercice 7. ♥
Recommencez l'exercice précédent en choisissant des points du quadrillage et en utilisant celui-ci pour répondre à la question.

Vecteurs opposé et nul.

En considérant le cas de la somme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ nous sommes naturellement amenés à considérer un vecteur que nous appellerons *le vecteur nul*, que nous noterons $\overrightarrow{0}$. En effet la première translation transforme A en B et la seconde Ben A : globalement il n'y a pas de déplacement.

Le vecteur nul ne possède ni sens ni direction et sa norme est nulle.

Nous écrirons donc : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

Par analogie avec la somme des nombres nous dirons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont *opposés* et nous écrirons

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$$

De même que pour les nombres nous simplifierons les écritures en utilisant la *soustraction de vecteur* : $\vec{u}+(-\vec{v})=\vec{u}-\vec{v}$.

Nous pourrons donc manipuler les vecteurs comme des nombres en les additionnant, en les soustrayant, en prenant leurs opposés, etc.

Exercice 8. Application.
En choisissant des points judicieux complétez.

1. $\overrightarrow{AB}+\cdots=\overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{G\ldots}+\overrightarrow{B\ldots}=\overrightarrow{GI}$
3. $\overrightarrow{\ldots B}+\overrightarrow{B\ldots}=\overrightarrow{CG}$
4. $\overrightarrow{BE}+\cdots=\overrightarrow{BD}$
5. $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\ldots F}=\overrightarrow{B\ldots}$
6. $\overrightarrow{B\ldots}+\overrightarrow{\ldots A}=\overrightarrow{BA}$
7. $\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{G\ldots}=\overrightarrow{B\ldots}$
8. $\overrightarrow{\ldots E}+\overrightarrow{E\ldots}=\overrightarrow{BC}$
9. $\overrightarrow{A\ldots}+\overrightarrow{B\ldots}=\overrightarrow{AC}$
10. $\overrightarrow{O\ldots}+\overrightarrow{M\ldots}=\overrightarrow{\ldots P}$
11. $\overrightarrow{A\ldots}+\overrightarrow{D\ldots}+\overrightarrow{M\ldots}=\overrightarrow{AG}$

Exercice 9. ♥

Soient A, B, C, E, G et I des points du plan. Simplifiez les expressions suivantes (grâce notamment à la relation de Chasles).

1. $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CG}$
2. $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{CG}$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{CG}$

Exercice 10. Application.

Simplifiez les expressions.

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$
2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$

Exercice 11. Application.

Démontrez.

1. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.
2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
3. $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$.
4. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
5. $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$
6. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

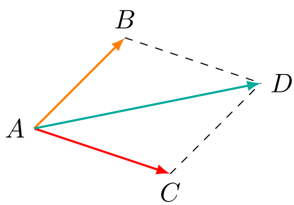
Somme de vecteurs : identité du parallélogramme.

Mathématiquement nous retiendrons :

Proposition 3 - Identité du parallélogramme.

Soient A, B, C et D des points du plan.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ équivaut à dire que $ABDC$ est un parallélogramme.



Remarques.

1. Nous utiliserons ce résultat pour dessiner le vecteur somme lorsque les représentants additionnés ont la même origine.
2. Cette identité est plus rarement utilisée dans les calculs que la relation de Chasles.

Exercice 12. ♥
Dessinez trois points A, B et C non alignés hors des quadrillages de votre feuille et dessinez le vecteur somme $\vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Il paraît naturel de noter : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$. En généralisant nous définirons n'importe quel vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$, λ désignant un réel.

Définition 1

Soient $\overrightarrow{AB}$ le représentant d'un vecteur et λ un nombre quelconque.
Nous définissons le vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$ par

— $\lambda\overrightarrow{AB}$ a même direction que $\overrightarrow{AB}$

— la norme de $\lambda\overrightarrow{AB}$ est $|\lambda|AB$

— si $\lambda > 0$ alors $\lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même sens et si $\lambda < 0$ alors ils sont de sens contraire.

Remarques.

1. Plutôt que d'apprendre cette définition sachez l'utiliser. Les vecteurs ont même direction, la longueur est multipliée par autant que l'indique λ et le sens dépend du signe de λ.
2. Nous retrouverons les règles habituelles de distributivité, de commutativité, d'associativité.
   Si λ et μ sont des nombres et $\vec{u}$ et $\vec{w}$ des vecteurs, alors
   $$\lambda(\vec{u}+\vec{w}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{w}, \quad (\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}, \quad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$$

Exercice 13. ♥
Dessinez deux points A et B distincts puis placez les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 14. Application.
Soient A et B deux points distincts, I le milieu du segment $[AB]$.
Dans chaque cas déterminez le réel λ tel que : $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BI} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Exercices.

Exercice 15. Application.

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construisez le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.
2. Justifiez que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$.
3. F est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$. Justifiez que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FB}$.

Exercice 16. Application.

Soient A et B deux points du plan distants de 6 unités de longueur (choisissez deux unités de longueur par centimètre).

1. (a) Construisez le point L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
   (b) Construisez le point K tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{LK}$ peut s'écrire $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$, établissez une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Déduisez-en la longueur LK en unités de longueur.

Exercice 17. Application.

Soient A, B et C trois points du plan tels que :

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

1. Réalisez une figure.
2. En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ peut s'écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, exprimez le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$ en justifiant la réponse.

Exercice 18. Application.

Soit $MNPQ$ un parallélogramme. On définit le point R tel que $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$ et le point S tel que $\overrightarrow{MS} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

1. Réalisez une figure.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{MR}$ peut s'écrire $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$, montrez que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$.
   (b) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{NS}$ peut s'écrire $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS}$, montrez que $\overrightarrow{NS} = -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.
   (c) Déduisez-en une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{NS}$.

Exercice 19. Application.
Soient $ABCD$ un parallélogramme et S et V des points tels que $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{CD}$.
Montrez que les segments $[VS]$ et $[AC]$ ont le même milieu.

III Géométrie repérée.

Coordonnées d'un vecteur.

Définition 2

Soient
. $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan,
. O un point du plan,
. I l'image de O par la translation de vecteur $\vec{i}$,
. J l'image de O par la translation de vecteur $\vec{j}$.

Nous dirons que $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est *une base du plan* si et seulement si $(O;I,J)$ est un repère du plan.

Remarques.

1. Pour que $(O;I,J)$ soit un repère il faut que les points O, I et J soient distincts et non alignés.
2. Si de plus $(O;I,J)$ est un repère orthonormé alors nous dirons que $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est *une base orthonormée*.
3. Nous pourrons dorénavant parler du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Définition 3

Soient :
. $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base du plan,
. $\vec{u}$ un vecteur du plan.

Il existe un unique couple de réels (x,y) de nombres réels x et y tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Le couple (x,y) est appelé le couple des *coordonnées* de $\vec{u}$.

Remarques.

1. De même que les coordonnées d'un point dépendent du repère choisi, les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie.
2. Pour une base fixée les coordonnées du vecteur sont uniques.
3. Les vecteurs de la base sont les vecteurs, en nombre minimum, qui permettent de décrire n'importe qu'elle translation.
4. La décomposition $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelée une *combinaison linéaire.*
5. Concrètement pour obtenir les coordonnées d'un vecteur dans un repère il suffit de compter les carreaux en suivant l'axe des abscisses puis recommence suivant l'axe des ordonnées, en partant de l'origine pour rejoindre l'extrémité.
6. Les coordonnées de vecteurs sont plutôt notées en colonne qu'en ligne

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Égalité de vecteurs.

Proposition 4

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

Égalité de représentants.

Proposition 5

Soient (O,I,J) un repère du plan, $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ des points dans ce repère.
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Remarques.

1. Les coordonnées de vecteurs sont notées en colonnes pour les distinguer des coordonnées de points et pour faciliter la présentation des calculs.

2. Pour que les coordonnées de vecteurs soient intéressantes à utiliser il faudrait que les coordonnées du vecteur soient les mêmes quelque soit le représentant choisi. Vérifions ceci dans la proposition suivante.

Exercice 20. ♥

Soient $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(3;0)$ et $D(-1;-3)$ des points du plan muni d'un repère. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.

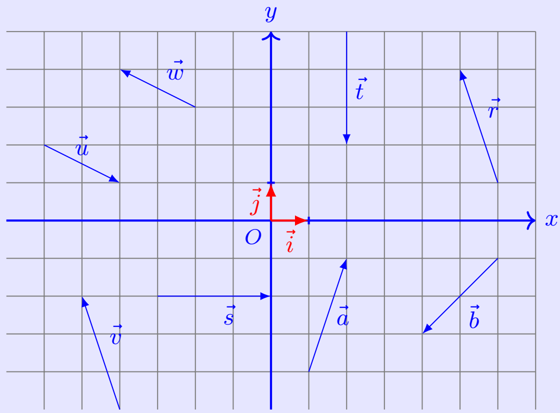
Exercice 21. Application.

Soient $A(-3;3)$, $B(2;5)$, $C(4;0)$ et $D(-1;-2)$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculez AC et BD.
3. Qu'en déduisez-vous sur $ABCD$?

Exercice 22. Application.

Lisez les coordonnées des vecteurs représentés ci-contre et indiquez ceux qui sont égaux.



Exercice 23. Application.

Soient $A(7;-3)$, $B(3;2)$ et $C(-5;-4)$ des points du plan muni d'un repère. Déterminez les coordonnées du point $D(x_D;y_D)$ qui vérifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Exercice 24. ♥

Soient $A(2;-3)$ et $B(-1;4)$ deux points dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Calculez $||\overrightarrow{AB}||$.

Somme vectorielle et coordonnées.

Proposition 6

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 25. ♥

Dans un repère on considère les points : $A(-2;1)$, $B(3;4)$ et $C(-5;2)$.
Calculez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Multiplication d'un vecteur par un scalaire avec les coordonnées.

Proposition 7

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Exercice 26. Application.

Déterminez les coordonnées de $-7\vec{u}$ sachant que $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

IV Exercices.

Exercice 27. Application.

Si $ABCD$ est un parallélogramme alors on peut simplifier (sans justifier)

1. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$.
2. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.
3. $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$.

Exercice 28.

Soient $A(-1;-2)$, $B(5;-1)$, $C(6;3)$ et $D(0;2)$ des points considérés dans un repère du plan.

1. Faites un figure.
2. Construisez le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.
3. Déterminez les coordonnées de E.
4. Démontrez que $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BC}$.
5. Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 29.

Soient ABC un triangle et K, L et M les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1. Démontrez que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BM}$.
2. Déduisez-en $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$.

Exercice 30. Application.

Soient ABC un triangle, D et E des points tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.
Faites une figure puis démontrez que C est le milieu du segment $[AD]$.

Exercice 31. Application.

Soient $ABCD$ un carré, E le symétrique de A par rapport à B et le point I le milieu de $[BC]$.

1. Justifiez que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé du plan.
2. Déterminez les coordonnées des différents points de la figure puis montrez que I est le milieu de $[DE]$.
3. Démontrez ce résultat sans utiliser de repère.

Exercice 32. Application.

On considère un carré $ABCD$ non réduit à un point.

1. Justifiez que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère du plan. Est-il orthonormé ?
2. Justifiez que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et en déduire les coordonnées du point C dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
3. On considère le point E symétrique de A par rapport à B et le point F symétrique de F par rapport à D.
   Déterminez les coordonnées des points E et F dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
4. Que semble représenter le point C par rapport aux points E et F ? Démontrez le par au moins 3 méthodes différentes.

Exercice 33. Application.

Soit A, B, C et D quatre points quelconques.

1. Démontrer les égalités suivantes.
   (a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{DA}$
   (b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$
2. Simplifier l'écriture des vecteurs suivants.
   (a) $\vec{u} = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}\right)$
   (b) $\vec{v} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

Exercice 34. Application.

Soient T, R et I trois points non alignés.
Les points U et V sont définis par :

- $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{IR} + \overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TI} + \overrightarrow{TR}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IT} + \overrightarrow{TR}$.
   (b) Conclure.

Exercice 35. Application.

Soient T, R et I trois points non alignés. On définit les points A, B et C par :

- $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{RT} - \overrightarrow{IT}$
- $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RI}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.
   (b) En déduire une expression des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{RT}$ puis conclure.

Exercice 36.

V Centre d'inertie (presque le centre de gravité), barycentre. ♦

Isobarycentre de deux points.

Barycentre de deux points.

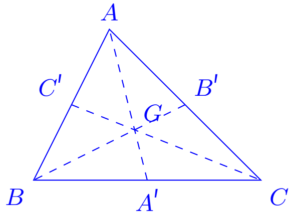
Isobarycentre de trois points : centre de gravité d'un triangle.

Exercice 37. Recherche.

1. $[AB]$ est un segment et I est son milieu.
   (a) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$?
   (b) Démontrer que quelque soit le point M choisi,

$$\overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right).$$

2. Soient ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.



   (a) Appliquer la formule établie à la question 1. aux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.

   (b) Déduisez-en que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

   (c) On note G le centre de gravité de ABC.
   Déduisez de la question précédente que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Barycentres.