Vecteurs du plan (introduction).

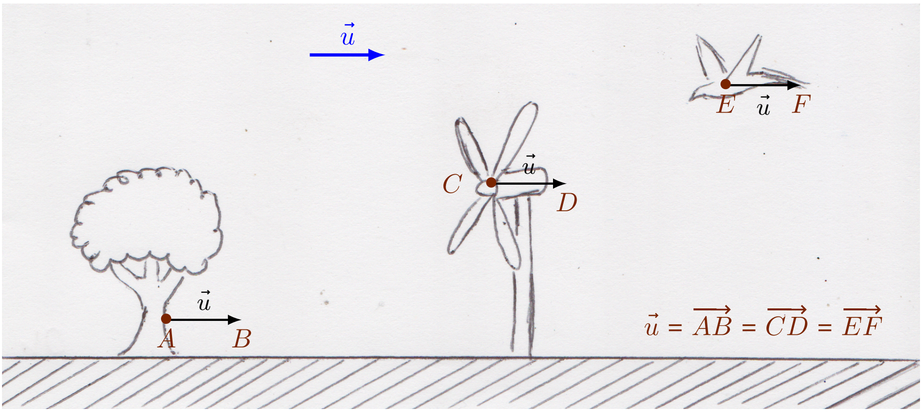
Remarque liminaire. Dans cette leçon nous aurons besoin des instruments du géomètre : le compas, la règle non graduée, le crayon à papier bien taillé et la gomme.

I Approche intuitive et historique.

Force : apparition historique.

Un exemple parlant de vecteur est celui du vent. Il s'agit d'une force qui est (dans une certaine région) partout de même intensité, qui suit la même direction et qui s'applique en tout point.

Si nous notons $\vec{u}$ le vent dans son ensemble nous noterons $\overrightarrow{AB}$ le *représentant* de ce vent qui s'applique au point A.



Le *vecteur* $\vec{u}$ est un nouvel objet géométrique qui regroupe trois notions géométriques.

— La *norme*, c'est-à-dire la longueur (comme celle d'un segment) : $||\vec{u}|| = AB$

— La *direction* (la droite (AB) et toutes les droites qui lui sont parallèles (CD), (EF), etc).

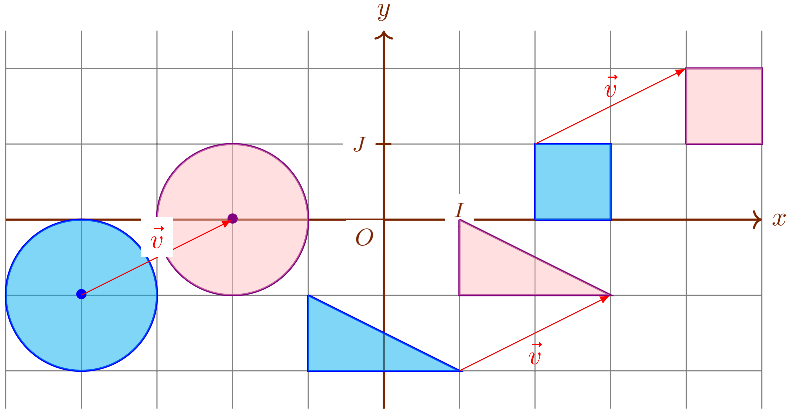
— Le *sens* (un sens de déplacement sur la direction) : de A vers B ou de B vers A.

Remarquons que la gravitation qui est étudiée en physique n'est pas, en toute rigueur, un vecteur puisqu'elle diminue d'intensité lorsque l'objet s'éloigne de la Terre et qu'elle n'a pas la même direction suivant l'endroit du globe terrestre considéré.

Translation : la définition du collège.

Comme vous l'avez le savez depuis le collège, une *translation* est une transformation géométrique qui correspond à un déplacement rectiligne, sans rotation, retournement ni déformation de cet objet.

Regardons par exemple les effets de la translation de vecteur $\vec{v}$ sur des objets du plan.



L'exemple précédent nous incite à utiliser le quadrillage pour décrire le déplacement. Nous généraliserons cette idée en disant que se déplacer d'un carreau de la gauche vers la droite c'est faire la translation qui transforme O en I que nous noterons $\vec{i}$. De même un déplacement vertical sera décrit avec le vecteur $\vec{j}$ qui correspond à la translation transformant O en J.

Le points de vue de la translation revêt un intérêt supplémentaire dans l'application qui en est faite en mécanique pour repérer la position d'un point dans le plan.

Historique.

Les vecteurs du plan sont des cas particuliers d'une notion très générale qui fait partie de l'*algèbre linéaire* (ce qu'on pourrait comprendre comme un calcul avec des lignes).

Cette dernière fut essentiellement développée au dix-neuvième siècle. Si des célébrités comme Gauss, Jordan ou Hamilton contribuèrent à son développement c'est *Hermann Grassmann* qui en découvrit toute la richesse.
Isolé, il ne parvint à faire reconnaître ses découvertes. Rejeté des milieux universitaires il enseigna longtemps au Gymnasium avant d'obtenir tardivement une reconnaissance universitaire dans le domaine de la linguistique en rédigeant un dictionnaire sanskrit et en traduisant le Rig-Véda.

Les élèves de classes préparatoires connaissent son nom grâce à la formule dite de Grassmann qui n'est pas sans rappeler une formule de probabilité

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

II Bipoints : des représentants géométriques d'un vecteur.

Définitions.

Ce n'est pas une définition très rigoureuse mais elle a l'avantage d'être simple et intuitive.

Nous définirons un *vecteur $\vec{u}$* comme le déplacement associé à une translation.

Si M et N sont deux points du plan. Nous dirons que $\overrightarrow{MN}$ est *un représentant du vecteur $\vec{u}$* correspondant à la translation qui transforme M en N.

Si $\overrightarrow{MN}$ est un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ alors nous définissons
— la *norme du vecteur* par : $\|\vec{u}\| = MN$,
— la *direction du vecteur* qui est la droite (MN),
— le *sens du vecteur $\vec{u}$* : de M vers N.

Égalité de représentants.

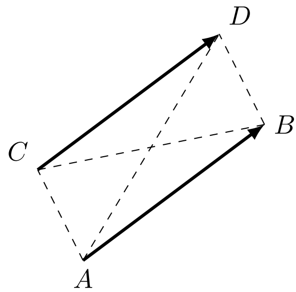
Deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ représentent le même vecteur si et seulement si ils vérifient les trois conditions :
— $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même norme, *i.e.* $AB = CD$,
— $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, *i.e.* $(AB)//(CD)$,

— le sens de A vers B est le même que celui de C vers D.
Si ces conditions sont vérifiées nous écrirons : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Cette façon, certes intuitive de voir que deux représentants sont égaux, sera avantageusement remplacée dans les démonstrations par la

Proposition 1

Soient A, B, C et D des points du plan.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ représentent un même vecteur (*i.e.* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.



Démonstration 1

Indémontrable avec la construction non explicite des bipoints et des classes d'équivalences.

Remarques.

1. Rappelons que pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme il faut et il suffit de montrer que ses diagonales se coupent en leur milieu.
2. Dans la pratique il y a rarement d'inconvénients à confondre un vecteur et un de ses représentants. Nous dirons donc « le vecteur A, B » pour $\overrightarrow{AB}$.
3. A est appelé l'*origine* de $\overrightarrow{AB}$.
4. B est appelé l'*extrémité* de $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 1. ♥

Choisissez A, B, C et D des points distincts et non alignés du plan en dehors du quadrillage de votre feuille.
Notons $\vec{u}$ un vecteur dont $\overrightarrow{AB}$ est un représentant.

1. Dessinez le représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$.
2. Dessinez le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine C.
3. Dessinez le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'extrémité D.

Exercice 2. ♥

Recommencez le précédent exercice en choisissant maintenant les points sur le quadrillage et en utilisant ce dernier pour construire les représentants.

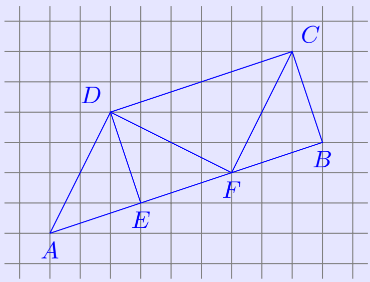
Exercice 3. ♥

Soient $A(-1{,}1)$, $B(2{,}3)$, $C(11,-7)$ et $D(14,-5)$ des points dans un repère orthonormé du plan.
Démontrez que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Exercice 4. Application.

Par lecture graphique indiquez

1. un vecteur égale à $\overrightarrow{AE}$; à $\overrightarrow{CF}$.
2. un vecteur de même direction que $\overrightarrow{CB}$ mais de sens opposé ; idem pour $\overrightarrow{AF}$.
3. un vecteur égale à $\overrightarrow{DC}$ d'extrémité F ; égale à $\overrightarrow{FB}$ d'origine A.
4. deux vecteurs de même de direction, de même sens qui ne sont pas égaux.
5. de vecteurs de même norme qui ne sont pas égaux.



Exercice 5. Application.

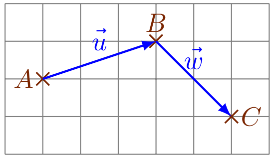
Dans un repère $(O; I, J)$ on considère les points $A(-3;-1)$, $B(0;1)$, $C(-2;2)$, $D(1;-2)$.
Nous noterons $\vec{u}$ le vecteur dont $\overrightarrow{AB}$ est un représentant.

1. Dessinez le représentant $\overrightarrow{CE}$ (donc d'origine C) du vecteur $\vec{u}$.
2. Placez le point F image de D par la translation de vecteur $\vec{u}$.
3. Que peut on conjecturer concernant le quadrilatère $CEFD$?
4. Démontrez votre conjecture.

Somme de représentants de vecteurs : la relation de Chasles.

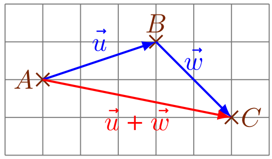
Soients $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ deux vecteurs et A un point du plan.

Notons B l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ et C celle de B par la translation de vecteur $\vec{w}$.



Si nous devons interpréter le déplacement total en terme de translation nous dirons que

C est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{w}$.

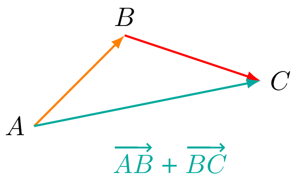


Ce résultat qui permet de définir une somme de vecteur, se formalise sous forme de

Proposition 2 - Relation de Chasles

Soient A, B et C trois points du plan.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Remarques.

1. Pour dessiner le représentant de la somme il faut choisir deux représentants des vecteurs qui « se suivent » : l'extrémité d'un représentant est l'origine de l'autre représentant à sommer.
2. Nous utiliserons aussi cette relation pour « calculer » avec des vecteurs, *i.e.* essentiellement pour simplifier les expressions.
3. La somme de vecteurs est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Exercice 6. ♥

Choisissez 4 points A, B, C et D non alignés et hors du quadrillage.
Construisez un représentant du vecteur somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Exercice 7. ♥

Recommencez l'exercice précédent en choisissant des points du quadrillage et en utilisant celui-ci pour répondre à la question.

Vecteurs opposé et nul.

En considérant le cas de la somme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ nous sommes naturellement amenés à considérer un vecteur que nous appellerons *le vecteur nul*, que nous noterons $\overrightarrow{0}$. En effet la première translation transforme A en B et la seconde Ben A : globalement il n'y a pas de déplacement.

Le vecteur nul ne possède ni sens ni direction et sa norme est nulle.

Nous écrirons donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Par analogie avec la somme des nombres nous dirons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont *opposés* et nous écrirons

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

De même que pour les nombres nous simplifierons les écritures en utilisant la *soustraction de vecteur* : $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$.

Nous pourrons donc manipuler les vecteurs comme des nombres en les additionnant, en les soustrayant, en prenant leurs opposés, etc.

Nous verrons dans la leçon sur les droites que les vecteurs et les droites sont intimement liés. Si bien que nous arriverons au résultat voulu par Grassmann : calculer avec des lignes.

Exercice 8. Application.

En choisissant des points judicieux complétez.

1. $\overrightarrow{AB} + \cdots = \overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{G\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{GI}$
3. $\overrightarrow{\ldots B} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{CG}$
4. $\overrightarrow{BE} + \cdots = \overrightarrow{BD}$
5. $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\ldots F} = \overrightarrow{B\ldots}$
6. $\overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{\ldots A} = \overrightarrow{BA}$
7. $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{G\ldots} = \overrightarrow{B\ldots}$
8. $\overrightarrow{\ldots E} + \overrightarrow{E\ldots} = \overrightarrow{BC}$
9. $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{AC}$
10. $\overrightarrow{O\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{\ldots P}$
11. $\overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{M\ldots} = \overrightarrow{AG}$

Exercice 9. ♥

Soient A, B, C, E, G et I des points du plan. Simplifiez les expressions suivantes (grâce notamment à la relation de Chasles).

1. $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{CG}$
2. $\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{CG}$
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{CG}$

Exercice 10. Application.

Simplifiez les expressions.

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$
2. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB}$

<u>Correction exercice 10</u>

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.
2. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}$.
3. $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BA}$.

Exercice 11. Application.

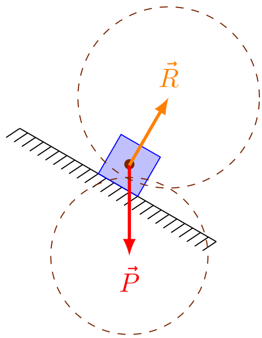
Démontrez.

1. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$.
2. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.
3. $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CD}$.
4. $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.
5. $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$
6. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$

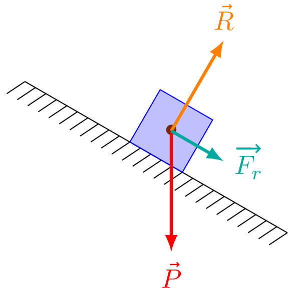
Somme de vecteurs : identité du parallélogramme.

Un glaçon est placé sur un plan incliné. Nous supposerons qu'il n'est soumis qu'a son propre poids $\vec{P}$ et à la réaction du sol $\vec{R}$ (pas de force de frottement, pas de force d'Archimède, etc). Nous avons représenté le bilan des forces appliquées au centre de gravité (ou centre d'inertie).

Nous recherchons la force résultante, $\overrightarrow{F_r}$, *i.e.* la somme de toutes les forces appliquées au glaçon.



Plutôt que de dessiner le représentant de $\vec{R}$ ayant pour origine l'extrémité de $\vec{P}$ nous allons construire le parallélogramme.
Ainsi
$$\vec{P} + \vec{R} = \overrightarrow{F_r}$$

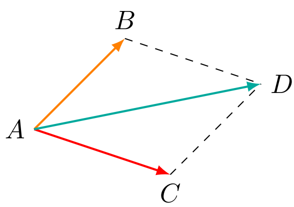


Mathématiquement nous retiendrons :

Proposition 3 - Identité du parallélogramme.

Soient A, B, C et D des points du plan.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ équivaut à dire que $ABDC$ est un parallélogramme.



Remarques.

1. Nous utiliserons ce résultat pour dessiner le vecteur somme lorsque les représentants additionnés ont la même origine.
2. Cette identité est plus rarement utilisée dans les calculs que la relation de Chasles.

Exercice 12. ♥

Dessinez trois points A, B et C non alignés hors des quadrillages de votre feuille et dessinez le vecteur somme $\vec{s} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

La valeur absolue.

Par définition la *valeur absolue* d'un nombre x est le nombre positif

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Multiplication d'un vecteur par un scalaire.

Il paraît naturel de noter : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AB}$. En généralisant nous définirons n'importe quel vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$, λ désignant un réel.

Définition 1

Soient $\overrightarrow{AB}$ le représentant d'un vecteur et λ un nombre quelconque.
Nous définissons le vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}$ par

- $\lambda\overrightarrow{AB}$ a même direction que $\overrightarrow{AB}$
- la norme de $\lambda\overrightarrow{AB}$ est $|\lambda|AB$
- si $\lambda>0$ alors $\lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même sens et si $\lambda<0$ alors ils sont de sens contraire.

Remarques.

1. Plutôt que d'apprendre cette définition sachez l'utiliser. Les vecteurs ont même direction, la longueur est multipliée par autant que l'indique λ et le sens dépend du signe de λ.
2. Nous retrouverons les règles habituelles de distributivité, de commutativité, d'associativité.
   Si λ et μ sont des nombres et $\vec{u}$ et $\vec{w}$ des vecteurs, alors
   $$\lambda(\vec{u}+\vec{w})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{w},\quad (\lambda+\mu)\vec{u}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{u},\quad \lambda(\mu\vec{u})=(\lambda\mu)\vec{u}$$

Exercice 13. ♥

Dessinez deux points A et B distincts puis placez les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 14. Application.

Soient A et B deux points distincts, I le milieu du segment $[AB]$.
Dans chaque cas déterminez le réel λ tel que : $\overrightarrow{AI}=\lambda\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{BI}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

Exercices.

Exercice 15. Application.

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Construisez le point D tel que $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.
2. Justifiez que $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DB}$.
3. F est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$. Justifiez que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FB}$.

Correction exercice 15

1. L'intitulé triangle quelconque suggère qu'il faut éviter de se placer dans un cas particulier mais aussi que la construction doit se faire sans utiliser un quadrillage.
2. Par construction $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ donc $ABDC$ est un parallélogramme. Et par conséquent $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$. Il suffit de faire la figure pour s'en convaincre.
3. Puisque F est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$. Nous déduisons de cette dernière égalité que $AFBC$ est un parallélogramme. Enfin, comme $AFBC$ est un parallélogramme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FB}$.

Exercice 16. Application.

Soient A et B deux points du plan distants de 6 unités de longueur (choisissez deux unités de longueur par centimètre).

1. (a) Construisez le point L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
   (b) Construisez le point K tel que $\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{LK}$ peut s'écrire $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$, établissez une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Déduisez-en la longueur LK en unités de longueur.

Correction exercice 16

1. (a)
   (b)
2. (a) D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} \\
&= -\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} \\
&= -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \left(-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \left(-\frac{5}{2} - 1 - \frac{4}{3}\right)\overrightarrow{AB} \\
&= \left(-\frac{5\times 3}{2\times 3} - \frac{6}{6} - \frac{4\times 2}{3\times 2}\right)\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{-15-6-8}{6}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{LK} = -\frac{29}{6}\overrightarrow{AB}.}$$

(b) Puisque $\overrightarrow{LK} = -\frac{29}{6}\overrightarrow{AB}$, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{LK}\right\| &= \left|-\frac{29}{6}\right| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \frac{29}{6} \times AB \\ &= \frac{29}{6} \times 6\end{aligned}$$

$$\boxed{LK = 29.}$$

Exercice 17. Application.

Soient A, B et C trois points du plan tels que :

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

1. Réalisez une figure.
2. En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ peut s'écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, exprimez le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$ en justifiant la réponse.

Correction exercice 17

1.
2. Par construction

$$3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

ce qui équivaut, d'après la relation de Chasles, à

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{AB} - 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}.}$$

Exercice 18. Application.

Soit $MNPQ$ un parallélogramme. On définit le point R tel que $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$ et le point S tel que $\overrightarrow{MS} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

1. Réalisez une figure.
2. (a) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{MR}$ peut s'écrire $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$, montrez que $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$.

   (b) En remarquant que le vecteur $\overrightarrow{NS}$ peut s'écrire $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MS}$, montrez que $\overrightarrow{NS} = -\overrightarrow{MN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{MQ}$.

   (c) Déduisez-en une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{NS}$.

Correction exercice 18

1.
2. (a) D'après la relation de Chasles

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR}$$

   Or, d'après l'énoncé, $\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$, donc en substituant :

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MQ} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MN}$$

   (b)

Exercice 19. Application.

Soient $ABCD$ un parallélogramme et S et V des points tels que $\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{CD}$.
Montrez que les segments $[VS]$ et $[AC]$ ont le même milieu.

Correction exercice 19

En faisant à main levé une figure nous voyons que $AVCS$ est un parallélogramme et par conséquent ses diagonales se coupent bien en leur milieu. Démontrons-le proprement.

Montrons que $AVCS$ est un parallélogramme.

Pour cela nous allons démontrer que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$.

$$\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{AB}$$

Or $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et en remplaçant :

$$\overrightarrow{AV} = 2\overrightarrow{DC}$$

Comme, par construction, $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CS}$, en considérant les vecteurs opposés, nous en déduisons :

$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$$

Nous avons bien démontré que $\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{SC}$ et donc que $AVCS$ est un parallélogramme. Nous en déduisons que ses diagonales

$[VS]$ et $[AC]$ se coupent en leur milieu.

III Géométrie repérée.

Coordonnées d'un vecteur.

Définition 2

Soient
. $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan,
. O un point du plan,
. I l'image de O par la translation de vecteur $\vec{i}$,
. J l'image de O par la translation de vecteur $\vec{j}$.

Nous dirons que $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est *une base du plan* si et seulement si $(O;I,J)$ est un repère du plan.

Remarques.

1. Pour que $(O;I,J)$ soit un repère il faut que les points O, I et J soient distincts et non alignés.
2. Si de plus $(O;I,J)$ est un repère orthonormé alors nous dirons que $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est *une base orthonormée*.
3. Nous pourrons dorénavant parler du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

L'utilisation d'une base nous permet de définir les coordonnées d'un vecteur par exemple le vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$ aura pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Définition 3

Soient :
. $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan,
. $\vec{u}$ un vecteur du plan.

Il existe un unique couple de réels (x,y) de nombres réels x et y tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Le couple (x,y) est appelé le couple des *coordonnées* de $\vec{u}$.

Remarques.

1. De même que les coordonnées d'un point dépendent du repère choisi, les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie.
2. Pour une base fixée les coordonnées du vecteur sont uniques.
   Cette affirmation constitue un théorème qu'il faudrait démontrer ce que nous nous garderons de faire.
3. Les vecteurs de la base sont les vecteurs, en nombre minimum, qui permettent de décrire n'importe qu'elle translation.
4. La décomposition $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelée une *combinaison linéaire.*
   C'est pourquoi la branche des mathématiques traitant des vecteurs est appelée l'*algèbre linéaire* : *algèbre* à cause des calculs et *linéaire* à cause des *combinaisons linéaires* (et de l'origine historique).
5. Concrètement pour obtenir les coordonnées d'un vecteur dans un repère il suffit de compter les carreaux en suivant l'axe des abscisses puis recommence suivant l'axe des ordonnées, en partant de l'origine pour rejoindre l'extrémité.
6. Les coordonnées de vecteurs sont plutôt notées en colonne qu'en ligne

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Égalité de vecteurs.

Proposition 4

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

Démonstration 2

Ce résultat découle directement de l'unicité des coordonnées admises dans la précédente définition.

Égalité de représentants.

Proposition 5

Soient (O,I,J) un repère du plan, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ des points dans ce repère.
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Remarques.

1. Les coordonnées de vecteurs sont notées en colonnes pour les distinguer des coordonnées de points et pour faciliter la présentation des calculs.
2. Pour que les coordonnées de vecteurs soient intéressantes à utiliser il faudrait que les coordonnées du vecteur soient les mêmes quelque soit le représentant choisi. Vérifions ceci dans la proposition suivante.

Exercice 20. ♥

Soients $A(-2;1)$, $B(2;4)$, $C(3;0)$ et $D(-1;-3)$ des points du plan muni d'un repère.
Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.

Correction exercice 20

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Démontrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 4-1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

De même

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-(-1)\\0-(-3)\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

Donc, les vecteurs ayant même coordonnées : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
Et par conséquent

$ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 21. Application.

Soient $A(-3;3)$, $B(2;5)$, $C(4;0)$ et $D(-1;-2)$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculez AC et BD.
3. Qu'en déduisez-vous sur $ABCD$?

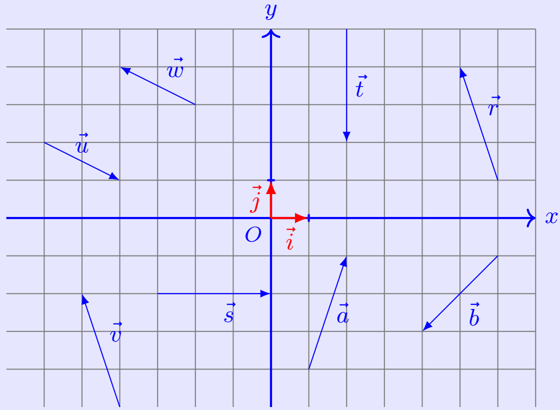
Correction exercice 21

1. Il suffit de procéder comme dans l'exercice précédent
2. Le repère étant orthonormé il suffit d'utiliser la formule $AC=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}$.
3. D'après les questions précédentes $ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

   $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 22. Application.

Lisez les coordonnées des vecteurs représentés ci-contre et indiquez ceux qui sont égaux.



Exercice 23. Application.

Soient $A(7;-3)$, $B(3;2)$ et $C(-5;-4)$ des points du plan muni d'un repère.
Déterminez les coordonnées du point $D(x_D;y_D)$ qui vérifie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Correction exercice 23

Déterminons x_D.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

De plus $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

Autrement dit dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \frac{x_A + x_D}{2} &= \frac{x_B + x_C}{2} \quad \text{et} \quad \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{y_B + y_C}{2} \\ \frac{7 + x_D}{2} &= \frac{3 + (-5)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-3 + y_D}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} \\ x_D &= -9 \quad \text{et} \quad y_D = 1 \end{aligned}$$

Nous avons démontré qu'il y a un seul point D qui satisfassent à la condition $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et ses coordonnées sont $(-9;1)$.

Exercice 24. ♥

Soient $A(2;-3)$ et $B(-1;4)$ deux points dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Calculez $||\overrightarrow{AB}||$.

Somme vectorielle et coordonnées.

Proposition 6

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$.

Exercice 25. ♥

Dans un repère on considère les points : $A(-2;1)$, $B(3;4)$ et $C(-5;2)$.
Calculez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Multiplication d'un vecteur par un scalaire avec les coordonnées.

Proposition 7

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$.

Exercice 26. Application.

Déterminez les coordonnées de $-7\vec{u}$ sachant que $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

IV Exercices.

Exercice 27. Application.

Si $ABCD$ est un parallélogramme alors on peut simplifier (sans justifier)

1. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$.
2. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.
3. $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$.

Exercice 28.

Soient $A(-1;-2)$, $B(5;-1)$, $C(6;3)$ et $D(0;2)$ des points considérés dans un repère du plan.

1. Faites un figure.
2. Construisez le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.
3. Déterminez les coordonnées de E.
4. Démontrez que $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BC}$.
5. Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 29.

Soient ABC un triangle et K, L et M les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

1. Démontrez que $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{BM}$.
2. Déduisez-en $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$.

Correction exercice 29

SI aucune figure n'est demandée il est nécessaire pour aborder un tel exercice de faire un schéma.

1. Comme M est le milieu de $[BC]$:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Donc, d'après a relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

Puisque K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{AL}\right)\\ &= \frac{1}{2} \times 2\overrightarrow{KA} + \frac{1}{2} \times 2\overrightarrow{AL}\\ &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{KL}}$$

2. Puisque M est le milieu de $[BC]$

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$$

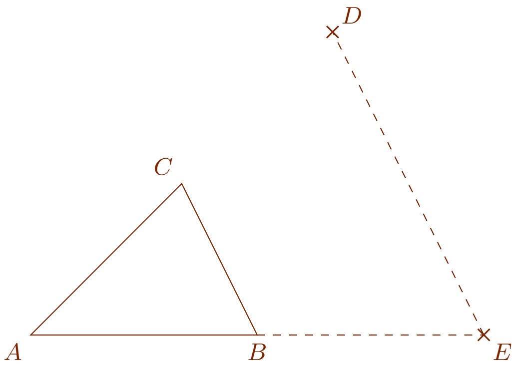
Donc, d'après la question précédente :

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{KL}.}$$

Exercice 30. Application.

Soient ABC un triangle, D et E des points tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.
Faites une figure puis démontrez que C est le milieu du segment $[AD]$.

Correction exercice 30



Nous allons utiliser une caractérisation vectorielle du milieu : C est le milieu de $[AD]$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Démontrons que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Pour démontrer cette égalité nous disposons d'informations sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BC}$. Nous allons, avec la relation de Chasles, nous allons décomposer $\overrightarrow{AD}$ en faisant apparaître tous ces vecteurs. Autrement dit il faut trouver un chemin qui va de A à D et qui passe si possible par B et E (ou C mais il s'avérera que ce n'est pas nécessaire).

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}$$

Comme $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} \\ &= 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} \end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \\ &= 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$$

Nous en déduisons finalement

C est le milieu de $[AD]$.

Nous aurions pu aussi utiliser une variante du théorème des milieux.

Exercice 31. Application.

Soient $ABCD$ un carré, E le symétrique de A par rapport à B et le point I le milieu de $[BC]$.

1. Justifiez que $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé du plan.
2. Déterminez les coordonnées des différents points de la figure puis montrez que I est le milieu de $[DE]$.
3. Démontrez ce résultat sans utiliser de repère.

Correction exercice 31

1. Par construction ABD est un triangle isocèle rectangle en A donc

$$\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right).$$

2. * Du fait du choix du repère : $A(0;0)$, $B(1;0)$, $D(0;1)$.
   * Puisque $ABCD$ est un carré : $C(1;0)$.
   * E est le symétrique de A par rapport à B. Autrement dit B est le milieu de $[AE]$. Nous en déduisons :

$$x_B = \frac{x_A + x_E}{2}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{0 + x_2}{2} \\ 1\times 2 &= \frac{x}{2}\times 2 \\ 2 &= x_E \end{aligned}$$

et de même pour les ordonnées :

$$y_B = \frac{y_A + y_E}{2}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{0+y_2}{2} \\ 0\times 2 &= \frac{x}{2}\times 2 \\ 0 &= y_E \end{aligned}$$

Ainsi : $E(2{,}0)$.

* Puisque I est le milieu de $[BC]$:

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ &= \frac{1+1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_I &= \frac{y_B + y_C}{2} \\ &= \frac{0+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc : $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Démontrons que I est le milieu de $[DE]$.

Nous allons simplement vérifier que le milieu de $[DE]$ et I coïncident car ils ont même coordonnées.

Si nous notons M le milieu de $[DE]$ nous avons d'une part

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_D + x_E}{2} \\ &= \frac{0+2}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_D + y_E}{2} \\ &= \frac{1+0}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$.
Puisque M et I ont même coordonnées nous pouvons affirmer

I est le milieu de $[DE]$.

3. En utilisant le théorème des milieux.

Exercice 32. Application.

On considère un carré $ABCD$ non réduit à un point.

1. Justifiez que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère du plan. Est-il orthonormé ?
2. Justifiez que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et en déduire les coordonnées du point C dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
3. On considère le point E symétrique de A par rapport à B et le point F symétrique de F par rapport à D.

   Déterminez les coordonnées des points E et F dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
4. Que semble représenter le point C par rapport aux points E et F ? Démontrez le par au moins 3 méthodes différentes.

Correction exercice 32

1. $ABCD$ est un carré donc ABD est un triangle isocèle rectangle en A. Par conséquent

   $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé.

2. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, d'après l'identité du parallélogramme

   $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

   Calculons les coordonnées de C.

   * D'une part $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$,
   * d'autre part $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} (1-0)+(0-0) \\ (0-0)+(1-0) \end{pmatrix}$,

   nous en déduisons donc : $x_C = 1$ et $y_C = 1$.

   $C(1; 1)$.

3. Puisque E et le symétrique de A par rapport à B, B est le milieu de $[AE]$ et, par conséquent, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$.
Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ nous en déduisons $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\times 1\\2\times 0\end{pmatrix}$ *i.e.* $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.
Mais $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E\\y_E\end{pmatrix}$ donc
$$\begin{cases} x_E = 2 \\ y_E = 0 \end{cases}$$
$$\boxed{E(2;0).}$$
En procédant de même
$$\boxed{F(0;2).}$$
4. C est le milieu de $[EF]$.
Voici trois méthodes pour le démontrer :
   * Montrer avec les coordonnées que $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CF}$.
   * En calculant les coordonnées du milieu de $[EF]$ nous nous rendons compte qu'elles coïncident avec celles de C.
   * En utilisant le théorème des milieux. Ceci dit il faudrait expliciter le fait que C est dans le même demi-plan délimité par (AD) que F.

Exercice 33. Application.

Soit A, B, C et D quatre points quelconques.

1. Démontrer les égalités suivantes.
   (a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{DA}$
   (b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$
2. Simplifier l'écriture des vecteurs suivants.
   (a) $\vec{u} = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}\right)$
   (b) $\vec{v} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

Correction exercice 33

1. (a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}\right) &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{DA}.}$$

(b) D'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}=\overbrace{AC}+\overrightarrow{BD}.}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\\ &= \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\vec{u}=\overrightarrow{0}.}$$

(b)

$$\vec{v}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$$

D'aprèsla relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{0}.}$$

Exercice 34. Application.

Soient T, R et I trois points non alignés.
Les points U et V sont définis par :

- $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{IR} + \overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TI} + \overrightarrow{TR}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{IT} + \overrightarrow{TR}$.
   (b) Conclure.

Exercice 35. Application.

Soient T, R et I trois points non alignés. On définit les points A, B et C par :

- $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{RT} - \overrightarrow{IT}$
- $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{TI}$
- $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RI}$

1. Faire une figure sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$.
   (b) En déduire une expression des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{RT}$ puis conclure.

Exercice 36.

V Centre d'inertie (presque le centre de gravité), barycentre. ♦

Isobarycentre de deux points.

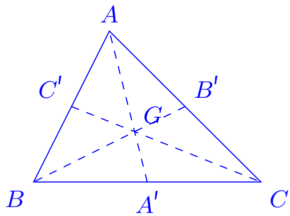
Barycentre de deux points.

Isobarycentre de trois points : centre de gravité d'un triangle.

Exercice 37. Recherche.

1. $[AB]$ est un segment et I est son milieu.
   (a) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$?
   (b) Démontrer que quelque soit le point M choisi,
$$\overrightarrow{MI}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).$$

2. Soient ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.



   (a) Appliquer la formule établie à la question 1. aux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.
   (b) Déduisez-en que $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.
   (c) On note G le centre de gravité de ABC.
   Déduisez de la question précédente que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Barycentres.

VI Ce qu'il faut retenir.

1. Les trois façons de se représenter un vecteur pour comprendre une situation : translation ,force, bipoint(direction, sens et norme, sa représentation dessinée).
2. Égalité de vecteurs : géométrique (deux représentants dessinent un parallélogramme) et analytique (coordonnées).
3. Vecteur nul et vecteur opposé.
4. Somme de vecteurs : géométriquement (relation de Chasles et identité du parallélogramme) et analytique (somme des coordonnées).
5. Multiplication d'un vecteur par un scalaire (nombre) : géométrique et analytique.