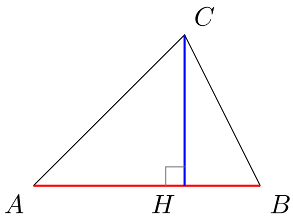
# Triangles.

## I Définitions et généralités.

### Vocabulaire.




$[HC]$ est appelé la *hauteur* de $ABC$ issue de $C$.
$H$ est appelé le *pied* de la hauteur issue de $C$.

### Description du triangle.

Le triangle est un polygone à trois côtés.

### Formulaire.

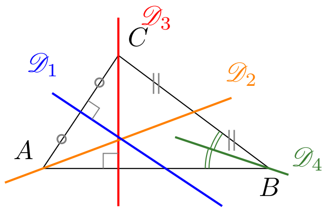
Aire du triangle : $\frac{1}{2} \times AB \times CH$.

### Classification des triangles.

Les triangles peuvent être dit :
- *scalène* si les longueurs des côtés sont toutes distinctes ;
- *isocèle en* si deux côtés ont la même longueur ;
- *rectangle en* si deux côtés sont perpendiculaires ;
- *isocèle-rectangle en* si deux côtés sont perpendiculaires et ont la même longueur ;
- *équilatéral* si les trois côtés ont la même longueur.

Remarque. L'expression « triangle quelconque » est utilisée pour parler d'un triangle choisi au hasard et qui peut donc être n'importe quel triangle y compris ceux ci-dessus.

**Droites remarquables du triangle.**




$\mathscr{D}_1$ est appelée la *médiatrice* du côté $[AC]$.
$\mathscr{D}_2$ est appelée la *médiane* issue de $A$.
$\mathscr{D}_3$ est appelée la *hauteur* issue de $C$.
$\mathscr{D}_4$ est appelée la *bissectrice* de $\widehat{ABC}$.
Le point d'intersection des médiatrices est appelé le *centre du cercle circonscrit au triangle*.
Le point d'intersection des médianes est appelé le *centre de gravité* du triangle.
Le point d'intersection des hauteurs est appelé l'*orthocentre* du triangle.
Le point d'intersection des bissectrices est appelé le *centre du cercle inscrit dans le triangle*.

# II Exercice de géométrie classique.

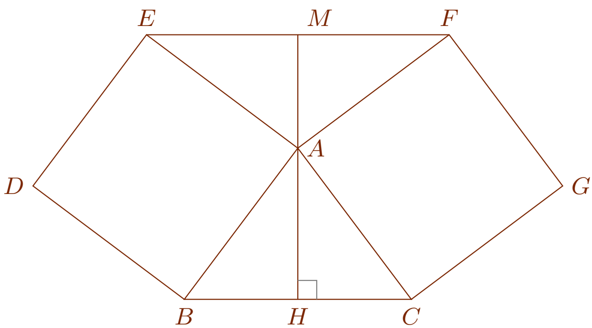
Exercice 1.

On considère un triangle $ABC$ isocèle en $A$ et les carrés $ABDE$ et $ACGF$ extérieurs au triangle.

1. Construisez une figure.
2. Démontrez que $(FE)$ et $(BC)$ sont parallèles.

Correction exercice 1

1.




2. Soit $H$ le pied de la hauteur issue de $A$.
   Puisque $ABC$ est isocèle en $A$, $(AH)$ est aussi la médiatrice de $[BC]$.

   Démontrons que $[BC]$ est la médiatrice de $[EF]$.

Notons $M$ le point d'intersection de $(AH)$ et de $(EF)$.
$\widehat{HAM}$ est plat ce qui équivaut successivement à

$$\begin{aligned} 180 &= \widehat{HAB} + \widehat{BAE} + \widehat{EAM} \\ 180 &= \widehat{HAB} + 90 + \widehat{EAM} \\ 90 - \widehat{HAB} &= \widehat{EAM} \quad (E_1) \end{aligned}$$

De même nous établirions que

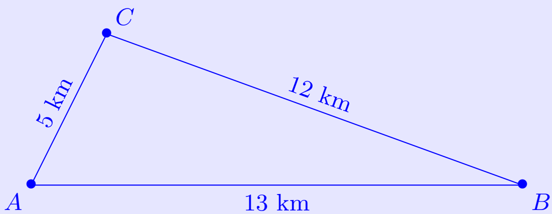
$$90 - \widehat{HAC} = \widehat{FAM} \quad (E_2)$$

Puisque $ABC$ est isocèle en $A$, $\widehat{HAC} = \widehat{HAB}$ et nous déduisons de $(E_1)$ et $(E_2)$ que $\widehat{EAM} = \widehat{FAM}$.
Autrement dit $(AM)$ est la bissectrice de $\widehat{EAF}$.
Puisque $AE = AF$ ($AEF$ est isocèle en $A$) la bissectrice de $\widehat{EAF}$ est aussi la médiatrice de $[EF]$.
Nous en déduisons que $(AH) \perp (BC)$ et $(AH) \perp (EF)$ donc

$$\boxed{(BC) \parallel (EF).}$$

## Exercice 2.

Trois personnes sont placées aux trois points $A$, $B$ et $C$ par géolocalisation GPS nous obtenons les distances qui les séparent comme ci-dessous.




1. Sur l'appareil GPS le triangle semble rectangle est-ce le cas ?
2. (a) Les trois personnes situées en $A$, $B$ et $C$ respectivement, souhaitent se rejoindre. En quel point doivent-elles se retrouver pour que toutes les trois parcourent la même distance ?

   (b) Pour se retrouver en ce point quelle direction les personnes situées en $A$ et $B$ doivent-elles suivre ? Quelle distance chacune des personnes doit-elle parcourir ?

Correction exercice 2

1. Si $ABC$ est rectangle ce ne peut être qu'en $C$ puisque $AB$ est le plus grand côté. Or $AB^2 = 13^2 = 169$ et $AC^2 + CB^2 = 5^2 + 12^2 = 169$ donc, d'après le théorème de Pythagore $ABC$ est rectangle en $C$.

   Célia a raison.

2. Pour que les trois parcourent la même distance elles doivent se retrouver au centre du cercle circonscrit à $ABC$.
3. Le triangle étant rectangle en $C$ le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

   Amélie et Bintou doivent se diriger l'une vers l'autre.

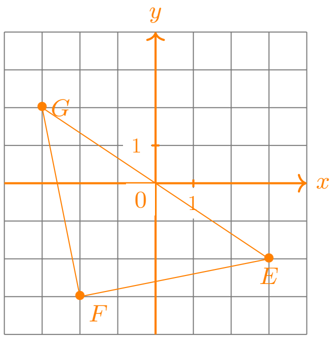
# III Exercices de géométrie repérée.

Exercice 3.

Dans un repère orthonormé, on donne les points : $E(3; -2)$, $F(-2; -3)$, $G(-3; 2)$. Quelle est la nature du triangle $EFG$ ?

Correction exercice 3

Dessinons le triangle afin de conjecturer la nature de $EFG$.




Il semble que $EFG$ soit isocèle rectangle en $F$.

* Démontrons que $EFG$ est isocèle en $F$.

Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-2)]^2 + [-2-(-3)]^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} FG &= \sqrt{(x_F - x_G)^2 + (y_F - y_G)^2} \\ &= \sqrt{[-2-(-3)]^2 + (-3-2)^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

Donc : $EF = FG$. Autrement dit

$EFG$ est isocèle en $F$.

* Démontrons que $EFG$ est de plus rectangle en $F$.

Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} EG &= \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-3)]^2 + (-2-2)^2} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

Nous avons :

| | |
|---|---|
| $EG^2 = \sqrt{52}^2$ <br> $= 52$ | $EF^2 + FG^2 = \sqrt{26}^2 + \sqrt{26}^2$ <br> $= 52$ |

et donc : $EG^2 = EF^2 + FG^2$.
Nous en déduisons, d'après le théorème de Pythagore, que

$EFG$ est rectangle en $F$.

Nous avons démontré que $EFG$ est isocèle rectangle en $F$.

## Exercice 4.

Dans un repère orthonormé du plan sont donnés les points $A(4;2)$, $B(6;-4)$ et $C(0,-2)$.

1. Démontrez que le triangle $ABC$ est isocèle.
2. On note $H$ le pied de la hauteur issue de $B$. Calculez la longueur $AH$, puis la longueur $BH$.

Correction exercice 4

1. Démontrons que $ABC$ est isocèle en $B$

   .
   Pour cela il suffit de démontrer que $AB = BC$.

   Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(4-6)^2 + (2-(-4))^2} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(6-0)^2 + (-4-(-2))^2} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

   Donc : $AB = BC$ et

$$\boxed{ABC \text{ est isocèle en } B.}$$

2. Déterminons la longueur $AH$.

   $H$ n'est pas que le pied de la hauteur issue de $B$. En effet, $ABC$ est isocèle en $B$, donc la hauteur issue de $B$ se confond avec la médiane issue de $B$ (par symétrie). Ainsi $H$ est aussi le milieu de $[AC]$. Donc :

$$AH = HC = \frac{AC}{2}$$

   Calculons la longueur $AC$.

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} \\ &= \sqrt{(4-0)^2 + (2-(-2))^2} \\ &= \sqrt{32} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{AH = HC = 2\sqrt{2}.}$$

Déterminons la longueur $BH$

.

$(BH)$ étant une hauteur de $ABC$, le triangle $ABH$ est rectangle en $H$. Nous en déduisons, d'après le théorème de Pythagore que

$$AH^2 + HB^2 = AB^2$$

Cette dernière égalité équivaut successivement à

$$\begin{aligned} \sqrt{32}^2 + HB^2 &= \sqrt{40}^2 \\ 32 + HB^2 &= 40 \\ 32 + HB^2 - 32 &= 40 - 32 \\ HB^2 &= 8 \end{aligned}$$

et $HB$ étant une longueur donc positive

$$\begin{aligned} HB &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{BH = 2\sqrt{2}.}$$

## Exercice 5.

Dans un repère orthonormé $(O,I,J)$ on donne les points :

$$A(4;3),\ B(-1;0) \text{ et } K(3,-1)$$

Montrez que $K$ appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Correction exercice 5

$K$ appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $AK = KB$.

Démontrons que $AK = KB$.

Le repère est orthonormé donc :

$$\begin{aligned}AK &= \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2}\\ &= \sqrt{(4-3)^2 + [3-(-1)]^2}\\ &= \sqrt{17}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}KB &= \sqrt{(x_K - x_B)^2 + (y_K - y_B)^2}\\ &= \sqrt{[3-(-1)]^2 + (-1-0)^2}\\ &= \sqrt{17}\end{aligned}$$

donc : $AK = KB$.
Et par conséquent

$K$ appartient à la médiatrice de $[AB]$.

## Exercice 6.

Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$ d'unité 1 cm, on considère les points suivants : $A(6; 0)$, $B(0; 4)$ et $C(1; -1)$.

1. Faire une figure.
2. Prouver que le triangle $ABC$ est rectangle.
3. On appelle $K$ le milieu du segment $[AB]$.
   (a) Calculer les coordonnées de $K$.
   (b) Prouver que $K$ appartient à la médiatrice de $[OC]$.