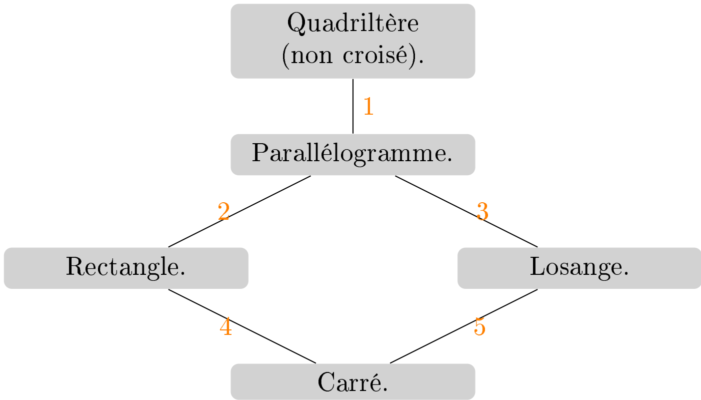
Quadrilatères.

I Quadrilatères (convexes) du plan.



1 Parallélogramme.

Proposition 1

Pour qu'un quadrilatère soit un *parallélogramme* il faut (conditions nécessaires) et il suffit que (il n'y a pas besoin de conditions supplémentaires) :

ses diagonales se coupent en leur milieu.

On utilise aussi d'autres conditions nécessaires et suffisantes :

1. les côtés opposés sont parallèles deux à deux ;
2. les côtés opposés sont de même longueur deux à deux ;
3. deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur ;
4. les angles opposés ont même mesure deux à deux ;
5. ses angles consécutifs sont supplémentaires deux à deux.

2 Rectangle.

Pour qu'un parallélogramme soit un *rectangle* il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des propositions suivantes :

1. il possède un angle droit ;
2. les diagonales ont même longueur ;

3 Losange.

Pour qu'un parallélogramme soit un *losange* il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des propositions suivantes :

1. il possède deux côtés consécutifs de même longueur ;
2. les diagonales sont perpendiculaires ;

4 et 5 Carré.

Pour qu'un rectangle soit un *carré* il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des proposition suivantes :

1. il possède deux côtés consécutifs de même longueur ;
2. les diagonales sont perpendiculaires ;

Pour qu'un losange soit un carré il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des proposition suivantes :

1. il possède un angle droit ;
2. les diagonales ont même longueur ;

Remarques.

1. Ainsi le carré est un losange ou un rectangle particulier, le rectangle et le losange sont des parallélogrammes particuliers. Les carrés, les losanges et les rectangles sont nécessairement (*i.e.* forcément) des parallélogrammes.
2. Ce travail peut être complété en ajoutant le trapèze.
3. Certaines caractérisations ne sont plus valables si les quadrilatères ne sont pas convexes.

II Géométrie classique.

Exercice 1.

On considère un trapèze $ABCD$ de bases $[AD]$ et $[BC]$. On place E sur le segment $[AD]$ et F sur le segment $[BC]$ tels que $AE = CF$.

1. Faites une figure à main levée.
2. Démontrer que $AFCE$ est un parallélogramme.

Exercice 2.

On considère un quadrilatère quelconque $ABCD$ et on place les milieux I, J, K et L des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Faites deux figures distinctes illustrant cet énoncé.
2. Émettez à partir des précédentes figures une conjecture.
3. Démontrez à l'aide de la propriété des milieux, que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AC).
4. Démontrez la conjecture formulée.

Exercice 3.

III Géométrie repérée.

Exercice 4.

Représentez les points proposés dans un repère orthonormé (O,I,J). Conjecturez la nature du quadrilatère ainsi construit puis démontrez cette conjecture.

1. $M(-1;3)$, $N(3;2)$, $P(3,-2)$, $Q(-2,-1)$.
2. $A(1;3)$, $B(5;1)$, $C(3,-1)$, $D(-1;1)$.
3. $E(3;1)$, $F(2;3)$, $G(-4;0)$, $H(-3,-2)$.
4. $P(-3;4)$, $Q(-2;1)$, $R(1;0)$, $S(0;3)$.
5. $U(1;3)$, $V(3,-1)$, $W(-1,-3)$, $S(-3;1)$.

Exercice 5. Application.

$[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres quelconques d'un cercle $\mathcal{C}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$?

Exercice 6.

Considérons un parallélogramme $ABCD$ dans un plan muni d'un repère. Sachant que $A(-1;7)$, $B(-20;100)$, $C(3;107)$ et $D(22;y_D)$, déterminez l'ordonnée y_D du point D.