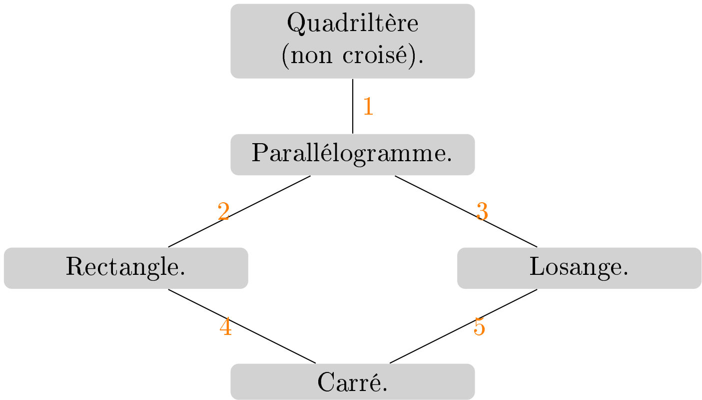
Quadrilatères.

I Quadrilatères (convexes) du plan.



1 Parallélogramme.

Proposition 1

Pour qu'un quadrilatère soit un *parallélogramme* il faut (conditions nécessaires) et il suffit que (il n'y a pas besoin de conditions supplémentaires) :

ses diagonales se coupent en leur milieu.

On utilise aussi d'autres conditions nécessaires et suffisantes :

1. les côtés opposés sont parallèles deux à deux ;
2. les côtés opposés sont de même longueur deux à deux ;
3. deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur ;
4. les angles opposés ont même mesure deux à deux ;
5. ses angles consécutifs sont supplémentaires deux à deux.

2 Rectangle.

Pour qu'un parallélogramme soit un *rectangle* il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des propositions suivantes :

1. il possède un angle droit ;
2. les diagonales ont même longueur ;

3 Losange.

Pour qu'un parallélogramme soit un *losange* il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des propositions suivantes :

1. il possède deux côtés consécutifs de même longueur ;
2. les diagonales sont perpendiculaires ;

4 et 5 Carré.

Pour qu'un rectangle soit un *carré* il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des proposition suivantes :

1. il possède deux côtés consécutifs de même longueur ;
2. les diagonales sont perpendiculaires ;

Pour qu'un losange soit un carré il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des proposition suivantes :

1. il possède un angle droit ;
2. les diagonales ont même longueur ;

Remarques.

1. Ainsi le carré est un losange ou un rectangle particulier, le rectangle et le losange sont des parallélogrammes particuliers. Les carrés, les losanges et les rectangles sont nécessairement (*i.e.* forcément) des parallélogrammes.
2. Ce travail peut être complété en ajoutant le trapèze.
3. Certaines caractérisations ne sont plus valables si les quadrilatères ne sont pas convexes.

II Géométrie classique.

Exercice 1.

On considère un trapèze $ABCD$ de bases $[AD]$ et $[BC]$. On place E sur le segment $[AD]$ et F sur le segment $[BC]$ tels que $AE = CF$.

1. Faites une figure à main levée.
2. Démontrer que $AFCE$ est un parallélogramme.

Correction exercice 1

Le résultat est à peu près immédiat puisque , par construction, les côtés $[AE]$ et $[CF]$ sont parallèles et de même longueur.

Exercice 2.

On considère un quadrilatère quelconque $ABCD$ et on place les milieux I, J, K et L des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Faites deux figures distinctes illustrant cet énoncé.
2. Émettez à partir des précédentes figures une conjecture.
3. Démontrez à l'aide de la propriété des milieux, que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AC).
4. Démontrez la conjecture formulée.

Exercice 3.

III Géométrie repérée.

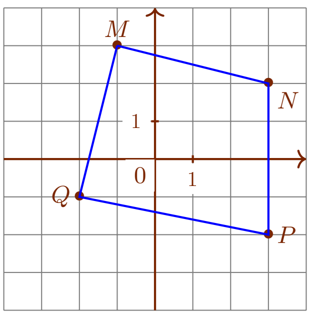
Exercice 4. ♥

Représentez les points proposés dans un repère orthonormé (O,I,J). Conjecturez la nature du quadrilatère ainsi construit puis démontrez cette conjecture.

1. $M(-1;3)$, $N(3;2)$, $P(3,-2)$, $Q(-2,-1)$.
2. $A(1;3)$, $B(5;1)$, $C(3,-1)$, $D(-1;1)$.
3. $E(3;1)$, $F(2;3)$, $G(-4;0)$, $H(-3,-2)$.
4. $P(-3;4)$, $Q(-2;1)$, $R(1;0)$, $S(0;3)$.
5. $U(1;3)$, $V(3,-1)$, $W(-1,-3)$, $S(-3;1)$.

Correction exercice 4

1. Conjecturons le résultat en dessinant la situation.



   Le quadrilatère ne semble pas même être un parallélogramme.

2. $ABCD$ semble être un parallélogramme démontrons-le.

   Notons M le milieu de $[AC]$. Nous avons

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = 1$$

Donc : $M(2;1)$.

Notons N le milieu de $[BD]$. Nous avons

$$x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{5+(-1)}{2} = 2 \qquad y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Donc : $N(2;1)$

Par conséquent : $M = N$.

Les diagonales de $ABCD$ se coupant en leur milieu nous pouvons affirmer que

$$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

3. Démontrons que $EFGH$ est un rectangle.

Démontrons tout d'abord que $EFGH$ est un parallélogramme.

Notons I le milieu de $[EG]$. Nous avons

$$x_I = \frac{x_E + x_G}{2} = \frac{3+(-4)}{2} = -\frac{1}{2} \qquad y_I = \frac{y_E + y_G}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc : $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Notons J le milieu de $[FH]$. Nous avons

$$x_J = \frac{x_F + x_H}{2} = \frac{2+(-3)}{2} = -\frac{1}{2} \qquad y_J = \frac{y_F + y_H}{2} = \frac{3+(-2)}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc : $J\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi : $I = J$. Autrement dit les diagonales de $EFGH$ se coupent en leur milieu et donc $EFGH$ est un parallélogramme.

Démontrons que le parallélogramme $EFGH$ est un rectangle.

Il suffit de montrer que, par exemple, ses diagonales sont de même longueur.

(O,I,J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned}EG &= \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2}\\ &= \sqrt{[3-(-4)]^2 + (1-0)^2}\\ &= \sqrt{50}\\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}FH &= \sqrt{(x_F - x_H)^2 + (y_F - y_H)^2}\\ &= \sqrt{[2-(-3)]^2 + [3-(-2)]^2}\\ &= \sqrt{50}\\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

Donc : $EG = FH$. $EFGH$ est donc un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

$EFGH$ est un rectangle.

4. Démontrons que $PQRS$ est un losange.

Démontrons tout d'abord que $PQRS$ est un parallélogramme.
Notons I le milieu de $[PR]$. Nous avons

$$x_I = \frac{x_P + x_R}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1 \qquad y_I = \frac{y_P + y_R}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$$

Donc : $I(-1;2)$.

Notons J le milieu de $[QS]$. Nous avons

$$x_J = \frac{x_Q + x_S}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 \qquad y_J = \frac{y_Q + y_S}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

Donc : $J(-1;2)$.
Ainsi : $I = J$. Autrement dit les diagonales de $PQRS$ se coupent en leur milieu et donc $PQRS$ est un parallélogramme.

Démontrons que le parallélogramme $PQRS$ est un losange.
Il suffit de montrer que, par exemple, que deux côtés consécutifs sont de même longueur.

(O,I,J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \\ &= \sqrt{[-3 - (-2))^2 + (4 - 1)^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - 1)^2 + (1 - 0)^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Donc : $PQ = QR$. $PQRS$ est donc un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur. Autrement dit :

$PQRS$ est un losange.

5. Démontrons que $UVWS$ est un carré.

Démontrons tout d'abord que $UVWS$ est un parallélogramme.
Notons I le milieu de $[UW]$. Nous avons

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_U + x_W}{2} \\ &= \frac{1 + (-1)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_I &= \frac{y_U + y_W}{2} \\ &= \frac{3 + (-3)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc : $I\,(0;0)$.

Notons J le milieu de $[VS]$. Nous avons

$$\begin{aligned} x_J &= \frac{x_V + x_S}{2} \\ &= \frac{3 + (-3)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_J &= \frac{y_V + y_S}{2} \\ &= \frac{-1 + 1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc : $J\,(0)$.
Ainsi : $I = J$. Autrement dit les diagonales de $PQRS$ se coupent en leur milieu et donc $PQRS$ est un parallélogramme.

Démontrons que le parallélogramme $UVWS$ est un losange.
Il suffit de montrer que, par exemple, que deux côtés consécutifs sont de même longueur.
(O,I,J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned} UV &= \sqrt{(x_U - x_V)^2 + (y_U - y_V)^2} \\ &= \sqrt{(1-3)^2 + [3-(-1)]^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} VW &= \sqrt{(x_V - x_W)^2 + (y_V - y_W)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-1)]^2 + [-1-(-3)]^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc : $UV = VW$. $UVWS$ est donc un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur. Autrement dit c'est un losange.

Démontrons que le losange $UVWS$ est un carré.
Il suffit par exemple de démontrer que $UVWS$ a des diagonales de même longueur.
(O,I,J) étant orthonormé :

$$\begin{aligned} UW &= \sqrt{(x_U - x_W)^2 + (y_U - y_W)^2} \\ &= \sqrt{[1-(-1)]^2 + [3-(-3)]^2} \\ &= \sqrt{85} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} VS &= \sqrt{(x_V - x_S)^2 + (y_V - y_S)^2} \\ &= \sqrt{[3-(-3)]^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{85} \end{aligned}$$

Donc : $UW = VS$. $UVWS$ est donc un losange dont les diagonales ont même longueur. Autrement dit :

$$\boxed{UVWS \text{ est un carré.}}$$

Exercice 5. Application.

$[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres quelconques d'un cercle $\mathcal{C}$. Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$?

Correction exercice 5

Démontrons que $ACBD$ est un rectangle.

$ACBD$ est un parallélogramme puisque ses diagonales $[AB]$ et $[CD]$ se coupent en leur milieu (qui est le centre du cercle).

$[AB]$ et $[CD]$ étant deux diamètres d'un même cercle $AB = CD$. Ainsi les diagonales du parallélogramme $ACBD$ ont même longueur et par conséquent

$$\boxed{ACBD \text{ est un rectangle.}}$$

Exercice 6.

Considérons un parallélogramme $ABCD$ dans un plan muni d'un repère. Sachant que $A(-1;7)$, $B(-20;100)$, $C(3;107)$ et $D(22;y_D)$, déterminez l'ordonnée y_D du point D.

Correction exercice 6

Déterminons l'ordonnée de D.

Notons M le milieu de $[AC]$.

Nous avons

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} \\ &= \frac{7+3}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Et puisque M est aussi le milieu de $[BD]$.

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_B + y_D}{2} \\ 5 &= \frac{-20 + y_D}{2} \\ 5\times 2 &= \frac{-20 + y_D}{2}\times 2 \\ 10 &= \frac{(-20 + y_D)\times 2}{2\times 1} \\ 10 &= -20 + y_D \\ 10+20 &= -20 + y_D + 20 \\ 30 &= y_D \end{aligned}$$

$$y_D = 30.$$