Géométrie repérée.

I De la géométrie euclidienne classique à la géométrie repérée.

Pour vous occuper au prochain confinement (ou cyclone, ou en remplacement de la dernière série américaine).

- *Éléments*. L'ouvrage d'*Euclide*, auxquels tous les grands mathématiciens se sont frottés dont je vous recommande la lecture pour la démarche logique et pour s'amuser à retrouver les résultats de géométrie que vous connaissez déjà mais formulés de façon inhabituelle : pdf et en epub.
- *Discours de la méthode* de *Descartes*. Celui-ci est plus un ouvrage de philosophie mais il est fondateur (en prévision de la terminale peut être) : pdf, epub.

II Des révisions de géométrie.

Nous utiliserons cette année vos connaissances antérieures de géométrie. Notamment sur les

— quadrilatères, (pdf) (pdf correction),
— triangles, (pdf) (pdf correction),
— cercles, (pdf) (pdf correction).

III Le repère cartésien.

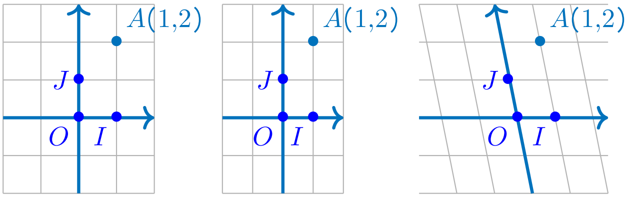
Généralités.

Définition 1

Soit O, I et J trois points distincts du plan.

1. Le repère (O,I,J) est dit *orthogonal* lorsque le triangle OIJ est rectangle en O.
2. Le repère (O,I,J) est dit *orthonormal*, ou *orthonormé*, lorsque le triangle OIJ est isocèle rectangle en O.

Exemples.

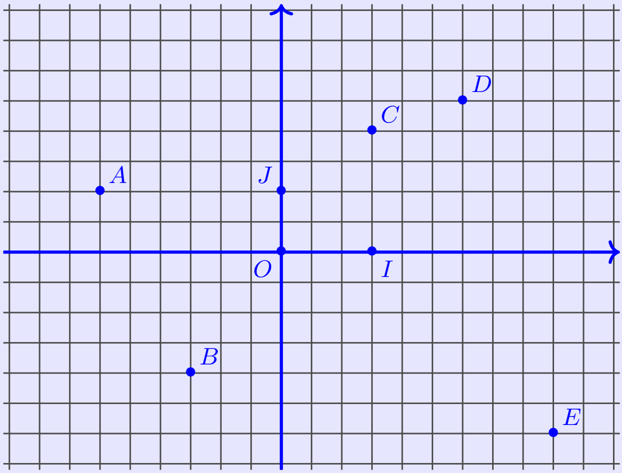


Remarques.

1. On pourrait ajouter un nouveau point K et considérer le repère (O,I,J,K) pour passer d'un espace à deux dimensions à un espace à trois dimensions.
2. Dans un couple de coordonnées la première coordonnée est (toujours) l'*abscisse* et la seconde l'*ordonnée*.
3. Nous noterons $\left(O,\overrightarrow{i}\right)$ l'*axe des abscisses* *i.e.* la droite (OI) orientée de O vers I.
   De même nous noterons $\left(O,\overrightarrow{j}\right)$ l'*axe des ordonnées* *i.e.* la droite (OJ) orientée de O ver J.
   Les notations $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ seront expliquées dans une autre leçon.

Exercice 1. ♥

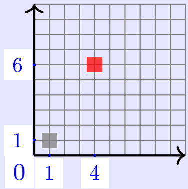
Dans le repère (O,I,J) ci-dessous



1. déterminez les coordonnées des points A, B, C, D et E ;
2. placez les points
   (a) $F(1;-2)$,
   (b) $G(-1;3)$,
   (c) $H\left(\frac{2}{3};0\right)$.

Exercice 2. Application.

L'affichage sur un moniteur (écran) est constitué de pixels, *i.e.* de tout petits carrés illuminés d'une seule couleur à la fois.
Il est possible de repérer chaque pixel par ses coordonnées.



Lors de la création d'un jeu vidéo l'affichage d'un personnage sera centré sur un pixel.

Afin de déplacer le personnage (ici le lutin sous Scratch) vers la droite ou vers la gauche le programme suivant est créé.
Le lutin apparaît au pixel de coordonnées (0,0).

1. Donnez les abscisses et ordonnées du lutin si l'utilisateur appuie sur la touche bas.
2. Donnez les abscisses et ordonnées du lutin si l'utilisateur appuie successivement sur la touche bas, la touche gauche, la touche bas et à nouveau la touche bas.
3. Proposez un enchaînement de touches sur lesquelles appuyer afin que le lutin se retrouve au point de coordonnées $(-90{,}30)$.
4. Expliquez pourquoi il est impossible que le lutin se retrouve au point de coordonnées $(25,-60)$.
5. Quelle transformation du plan est appliquée au lutin lorsqu'une instruction ajouter ◯ à ... est réalisée ?

Exercice 3. Application.

Tracez un repère orthonormé $(O{,}I{,}J)$ (1 cm ou un carreau pour unité) puis placez les points : $A(1;3)$, $B(-3;1)$ et $C(3,-3)$.

IV Distance.

Définition 2

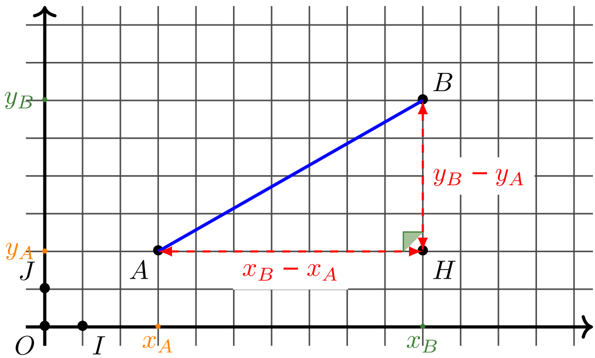
Dans un repère (O,I,J) orthonormé sont placés deux points A et B dont les coordonnées sont respectivement $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$.

La distance (euclidienne) de A à B est définie par

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Remarques.

1. Cette définition n'est valable que pour les repères orthonormés. Ce peut être un indice dans les exercices.
2. Cette formule se généralise en trois dimensions.
3. Cette formule permet de calculer (les distances donc) les longueurs en géométrie repérée.
4. Vous pourrez voir que cette formule est également appelée formule de la *moyenne géométrique*.
5. Cette formule est ici introduite comme une définition cependant il est possible de faire le lien avec la géométrie classique et les distance sur les axes gradués grâce au théorème de Pythagore :



Exercice 4. ♥

Les points $N(1;1)$, $P(-2;-1)$ et $Q(3;-2)$ sont placés dans un repère orthonormé du plan.
Démontrez que le triangle NPQ est isocèle en N.

Exercice 5. Application.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O,I,J), les points $K(-1;7)$, $L(-1;4)$ et $M(3;4)$ sont choisis.
Démontrez que le triangle KLM est rectangle en L.

Exercice 6. Application.

Rédigez un programme en Python qui détermine la longueur AB en fonction des coordonnées des points A et B dans un repère orthonormé.

V Coordonnées du milieu d'un segment.

Proposition 1

Dans un repère (quelconque) (O,I,J) sont placés deux points A et B dont les coordonnées sont respectivement $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$.

Les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Exercice 7. ♥

Soient $R(2;5)$ et $S(-256;-1002)$ deux points du plan qu'on a muni d'un repère (O,I,J).
Déterminez précisément le point d'intersection du segment $[RS]$ et de sa médiatrice.

Exercice 8. Application.

Soient $A(6;5)$ et $S(2;3)$ deux points d'un repère (O,I,J).
Déterminez les coordonnées du point A' symétrique de A par rapport à S.

Exercice 9. Application.

Rédigez un programme en Python qui donne les coordonnées du milieu d'un segment dont les coordonnées des extrémités sont connues.

VI Exercices

Exercice 10. Application.

Les points $A(1;2)$, $B(-16;-15)$ et $C(-5;-26)$ sont placés dans un repère orthonormé (O,I,J).
Démontrez que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 11. Application.

Un repère orthonormé (O,I,J) du plan étant choisi, dîtes si le triangle ABC est rectangle en A dans les cas suivants :

1. $A(2;-1)$, $B(-2;1)$ et $C(1;-3)$.
2. $A(-2;-3)$, $B(3;-2)$ et $C(-4;3)$.
3. $A(-1;2)$, $B(-3;6)$ et $c(-7;1)$.
4. $A(1;3)$, $B(5;1)$ et $C(-1;-1)$.
5. $A(1;5)$, $B(-1;-1)$ et $C(6;3)$.
6. $A(-1;4)$, $B(-2;3)$ et $C(2;1)$.

Exercice 12. Application.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;I,J)$. On construit un triangle PAT dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(-2;4)$, $(0;-1)$ et $(5;-2)$. Le point E est le milieu du segment $[AT]$.
La parallèle à (TP) passant par E coupe (PA) en F.
Quelles sont les coordonnées de F ?

Exercice 13. Recherche.

Soit x un nombre réel.
Nous appellerons *valeur absolue de x* le nombre $\sqrt{x^2}$ et nous le noterons $|x|$.

1. Calculez $|3|$, $|10|$ et $|\pi|$.
2. Dites si la phrase suivante est vraie ou fausse en justifiant : « quelque soit le nombre réel x, $|x| = x$ ».
3. Calculez sans aucune justification $|-2|$, $|1{,}2|$, $\left|\frac{-1}{3}\right|$ et $|-1+\pi|$.